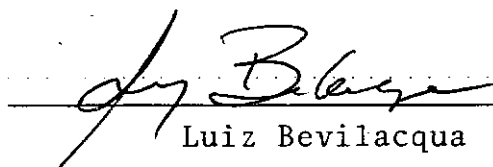



VIBRAÇÕES E ESTABILIDADE PARAMÉTRICA
DE CASCAS AXISSIMÉTRICAS

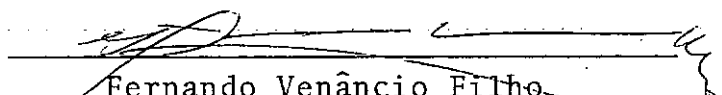
Abímael Fernando Dourado Loula

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS
DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO
DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTEN-
ÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS (D.Sc.).

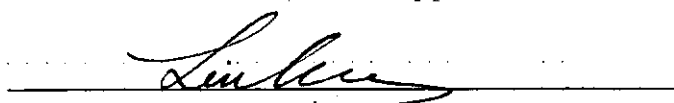
Aprovada por:


Luiz Bevilacqua
Presidente


Fernando Luiz Lobo B. Carneiro


Fernando Venâncio Filho


Arthur Palmeira Ripper Neto


Liu Hsu

Rio de Janeiro, RJ - BRASIL
Dezembro de 1979.

LOULA, Abimael Fernando Dourado

Vibrações e estabilidade paramétrica de
cascas axissimétricas Rio de Janeiro
1979.

VII, 141p. 29.7cm (COPPE-UFRJ, D.Sc.,
Engenharia Mecânica, 1979)

Tese - COPPE - UFRJ, Engenharia Mecânica

1. Vibrações, estabilidade, cascas I.COPPE/
UFRJ - II. Título (série)

À Marina Vasconcelos,

*que durante muitos anos lecionou,
simultâneamente, todas as turmas da Escola Ru-
ral de Canal (Irecê - BA), sem dispor sequer
de quadro negro.*

Às professoras,

*que hoje ensinam neste mesmo qua-
dro.*

Agradecimentos

Ao Professor *Luís Bevilacqua*, pela orientação deste e de muitos outros trabalhos e projetos que realizamos ou tentamos realizar.

Ao Professor *Lobo Carneiro*, cujo apoio foi decisivo no início dos meus estudos na COPPE.

Ao Professor *Liu Hsu*, pelas muitas discussões que tivemos sobre estabilidade dinâmica.

Aos colegas do Laboratório de Cálculo do CBPF, em particular a *A. C. Galeão*, companheiro de estudos, diálogos, discussões e brigas, e a *João Nisan*, que me ajudou na revisão deste trabalho.

À COPPE e ao CNPq, pelo apoio à Pos-Graduação e à Pesquisa no país.

A *Liane Bacellar* e *José Pedro*, pelo esmerado trabalho de datilografia e desenhos desta tese.

A *Ildenê*, minha esposa, pelo seu incentivo e apoio, presentes em todas as frentes desta luta que é viver.

SUMÁRIO

Apresenta-se, formalmente, o problema geral da *Dinâmica de Corpos Elásticos*, e estudam-se os problemas de resposta e estabilidade dinâmica de cascas girando em torno do eixo longitudinal, sujeitas a um carregamento que não acompanha o movimento de rotação rígida da casca.

Através de uma expansão em série de Fourier na variável circunferencial, mostra-se que este tipo de carregamento gera excitações periódicas sobre a casca.

Usando aproximações de diferença finita no tempo e de elementos finitos na direção longitudinal obtêm-se soluções transientes lineares e não lineares.

Determina-se a solução periódica correspondente ao regime permanente e estuda-se a estabilidade infinitesimal desta solução, derivando-se, explicitamente, a primeira aproximação das regiões de ressonância paramétrica.

SUMMARY

The general problem of *Dynamics of Elastic Bodies* is presented, and the problems of dynamic response and stability of rotating axisymmetric shells, under a non-rotating load, are studied.

Using a Fourier series expansion for the circumferential variable it is shown that this load generates a periodic excitation on the shell.

Linear and non-linear transient responses are then obtained through a finite difference approximation in the time domain and a finite element discretization in the longitudinal direction.

The steady-state periodic solution is determined. Its infinitesimal stability is studied and the first approximation of parametric resonance regions is explicitly derived.

I. INTRODUÇÃO

II. DINÂMICA DE CORPOS ELÁSTICOS

2.1 - Introdução	5
2.2 - Corpo e movimento.....	5
2.3 - Forças.....	12
2.4 - Equações constitutivas.....	16
2.5 - O problema de resposta dinâmica.....	20
a) Forma diferencial.....	20
b) Forma variacional (descrição Lagrangiana atualizada)	22
c) Forma variacional (descrição Lagrangiana total).....	23
d) Forma variacional incremental	24
2.6 - Estabilidade dinâmica	26

III. TEORIA DAS CASCAS

3.1 - Introdução	30
3.2 - Resultados da teoria das superfícies	31
3.3 - Descrição do movimento de uma casca como um corpo	35
3.4 - Hipóteses de Kirchhoff-Love	38
3.5 - Equações de equilíbrio	41
a) Casca espessa	41
b) Casca delgada	44
3.6 - Equação constitutiva	46
3.7 - Cascas de revolução	48

IV. VIBRAÇÕES E RESPOSTA DINÂMICA DE ROTORES DE CASCAS
DE REVOLUÇÃO

4.1 - Introdução	51
4.2 - Formulação do problema	54
4.3 - Resposta transiente não linear	58
4.4 - Resposta não linear em regime	62
4.5 - Vibrações autônomas lineares	64
4.5.1 - Vibrações livres	65
4.5.2 - Estabilidade de equilíbrio	69
4.5.3 - Resposta linear em regime	70

4.5.4 - Ressonância simples	74
4.6 - Consideração da massa do carregamento	75
4.7 - Aplicações numéricas	76
4.7.1 - Aproximação de elementos finitos	76
4.7.2 - Exemplos de vibrações livres	79
a) Estudo da convergência dos autovalores	79
b) Casca cilíndrica bi-apoiada - bifurcação no espectro de frequências	81
c) Placa circular com furo central	83
4.7.3 - Resposta estática e dinâmica	85
a) Comparação com uma solução exata	86
b) Análise linear	88
c) Análise não linear	91
4.8 - Conclusões	95

V. ESTABILIDADE PARAMÉTRICA DE CASCAS AXISSIMÉTRICAS

5.1 - Introdução	97
5.2 - Resultados da teoria das equações diferenciais ordinárias	100
a) Sistema linear com coeficientes constantes ..	101
b) Sistema linear com coeficientes variáveis ...	102
c) Sistema Variacional	104
5.3 - Estudo da estabilidade paramétrica de cascas axissimétricas	105
5.4 - Determinação das regiões de ressonância para- métrica	108
a) Sistema não amortecido	115
b) Carregamento sem massa	116
c) Influência do amortecimento	117
d) Influência da massa	118
5.5 - Conclusões	121

BIBLIOGRAFIA	124
--------------------	-----

SIMBOLOGIA	133
------------------	-----

I. INTRODUÇÃO

Em princípio, o engenheiro está sempre interessado em resolver problemas reais. Mas durante o processo de resolução, o problema real é normalmente substituído por um problema ideal, o ideal pelo possível e o possível pelo viável.

O problema real que motivou este trabalho foi, inicialmente, a análise dinâmica de moinhos de bolas. Este tipo de moinho, também conhecido como moinho de pelotização de minério é muito usado em indústrias químicas, indústrias de mineração e em indústrias de fabricação de cimento; sempre com o objetivo de trituração e consequente redução do diâmetro das partículas do conteúdo. Um moinho de bolas é essencialmente um casco de aço de seção transversal axissimétrica (geralmente cilíndrica ou associação cone-cilindro) com eixo longitudinal horizontal ou ligeiramente inclinado, contendo aberturas para alimentação, numa extremidade e para descarga, na outra. O casco é apoiado sobre mancais que permitem a rotação do moinho em torno do eixo longitudinal, quando solicitado por um torque aplicado numa das extremidades através de um sistema de polias ou rodas dentadas acionados por um motor, figura 1.1.

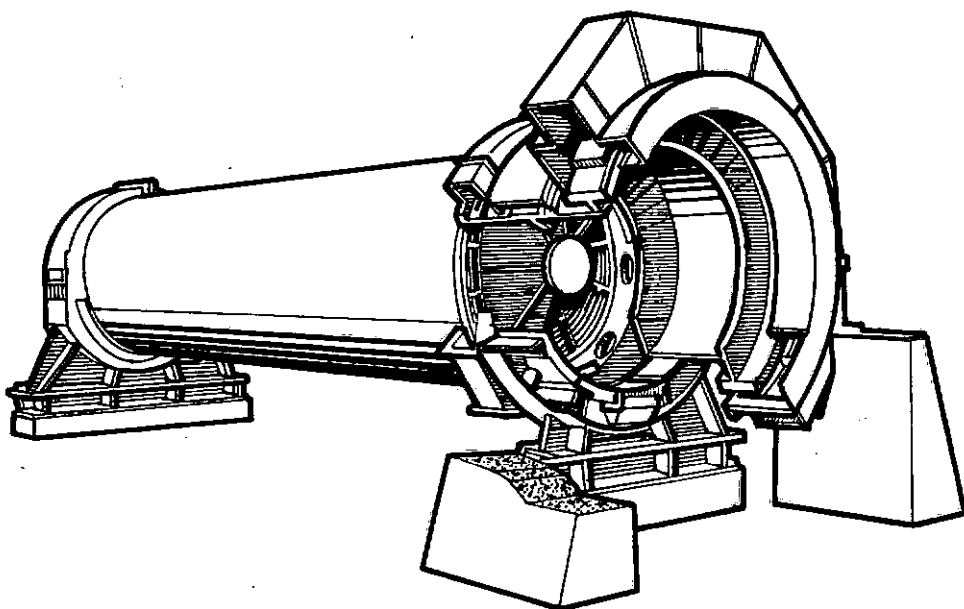


Fig. 1.1 - Moinho de bolas de corpo cilíndrico.

Do ponto de vista mecânico, um moinho pode ser idealizado como uma casca axissimétrica delgada girando em torno do eixo de simetria e sujeita a ações provenientes da interação entre o conteúdo (minério + bolas) e o casco do moinho. A questão principal é justamente como simular as excitações geradas pelo carregamento interno, uma vez que o conteúdo não tem uma lei de comportamento bem definida.

Normalmente, os projetos de moinhos são baseados apenas na resposta estática do sistema, considerando-se o peso próprio e o peso do conteúdo, e desprezando-se os efeitos da rotação [1] e [2]. Na única referência encontrada sobre análise dinâmica [3], os autores concluem, através de testes em modelos reduzidos, que são pequenos os efeitos dinâmicos gerados pela rotação, mas fazem ressalvas de que podem não ter conseguido simular adequadamente os impactos causados pelos materiais dentro do protótipo. Além disto, estes testes não foram suficientes para esclarecer a natureza das excitações geradas, e precisar a influência da rotação na resposta do sistema.

O modelo mecânico que será analisado no presente trabalho, não leva em conta impactos do conteúdo sobre o casco, mas considera os efeitos da rotação sobre a casca, e as excitações dinâmicas geradas por um carregamento fixo no espaço, ou seja, admite-se que o carregamento tem intensidade constante e conhecida, porém solicita diferentes regiões da casca a medida que esta gira. Além do carregamento estático, analisou-se ainda o caso em que o carregamento tem intensidade periódica no tempo.

Outros sistemas mecânicos que são, essencialmente, cascas de revolução, girando em torno do eixo de simetria, são encontrados em rotores de centrífugas e de turbinas a gás, frequentemente usados na indústria aeronáutica. O principal interesse dos estudos desenvolvidos nesta área tem sido determinar a influência da velocidade de rotação sobre as frequências naturais e modos normais de vibração [4, 5, 6, 7 e 8], tendo sido observado experimentalmente e demonstrado teoricamente, pelas equações do movimento, a existência de ondas móveis na direção circunferencial: no mesmo sentido (*forward traveling waves*) e no sentido oposto à rotação (*backward traveling waves*); ao contrário do caso estacionário onde os modos normais de vibração são ondas fixas.

Neste ponto define-se o problema ideal que será estudado nos próximos capítulos: Vibrações de cascas axissimétricas com movimento de rotação; incluindo resposta dinâmica, vibrações livres e estabilidade paramétrica. [9, 10, 11].

No capítulo II são apresentados os fundamentos da mecânica do contínuo, visando principalmente formulações gerais dos problemas de resposta e estabilidade dinâmica de corpos elásticos, [12-16].

No capítulo III, partindo das equações gerais obtidas no capítulo anterior, derivam-se as expressões das componentes, (no sistema intrínseco da superfície média), dos tensores de tensão e deformação de uma casca como um corpo tridimensional. Através das hipóteses de Kirchhoff-Love, reduz-se a dimensão correspondente à espessura da casca, obtendo-se uma versão não linear da teoria de cascas delgadas proposta por Novozhilov [17]. Ao final estas expressões são particularizadas para cascas axissimétricas.

No capítulo IV obtêm-se as equações correspondentes ao problema de resposta dinâmica de cascas axissimétricas elásticas, girando em torno do eixo longitudinal, e sujeitas aos carregamentos descritos anteriormente. Usando uma expansão em série de Fourier na variável circunferencial, mostra-se que os carregamentos considerados geram excitações periódicas no tempo. Através de uma aproximação de elementos finitos na direção longitudinal, obtêm-se soluções transientes e soluções periódicas não lineares correspondentes a estas excitações.

Ainda no capítulo IV, confirmam-se resultados obtidos anteriormente [4 - 8], com relação à influência da velocidade de rotação e de um estado inicial axissimétrico, sobre as frequências e modos normais de vibrações da casca. São obtidos resultados significativos sobre a influência da rotação na resposta dinâmica da casca, explicitando-se as condições de ressonância simples, correspondentes ao carregamento estático e ao carregamento de intensidade variável.

No capítulo V, estuda-se a estabilidade infinitesimal da solução periódica obtida no capítulo IV. Tomando a forma variacional linearizada, chega-se ao sistema de equações diferenciais parciais com coeficientes periódicos no tempo. Usando uma aproximação de elementos finitos no domínio espacial, obtém-se

o sistema de equações diferenciais ordinárias no tempo, e determinam-se as regiões de ressonância paramétrica deste sistema por meio de um método de perturbação semelhante ao apresentado por HSU [18].

Resumindo, pode-se afirmar que o problema original, resposta dinâmica de moinhos de bolas, não foi completamente resolvido. Entretanto, o modelo mecânico utilizado na análise deste problema, permitiu conclusões quanto ao comportamento dinâmico, não apenas de moinhos, mas também de sistemas mecânicos semelhantes, tais como: rotores de centrífugas e ultracentrífugas, discos e rotores de turbinas.

II. DINÂMICA DE CORPOS ELÁSTICOS

2.1. Introdução

Um passo importante na solução de um problema é, sem dúvida, a formulação precisa do mesmo. Este é, precisamente, o objetivo fundamental da mecânica: formular leis gerais capazes de prever o comportamento dos corpos (movimento), quando sujeitos a ações mecânicas (forças), correlacionando um mundo ideal de modelos mecânicos com o mundo real dos fenômenos mecânicos.

Segundo Truesdell [12], já existem muitas pessoas trabalhando nesta área, e portanto o que os fundamentos da mecânica precisam não é de mais gente para pesquisar sobre eles, mas de mais gente para aprender, absorver, digerir e aplicar o que foi desenvolvido. Esta é a intenção deste estudo. Deste modo, o resumo apresentado a seguir, sobre fundamentos da mecânica do contínuo, visa apenas definir, formalmente, os problemas de resposta e estabilidade dinâmica de corpos elásticos, que constituem o objetivo específico deste trabalho. Esta apresentação está baseada principalmente nas referências [12] e [13].

2.2. Corpo e movimento

Um corpo B é uma variedade de partículas \bar{X} . Admite-se que esta variedade tenha certa regularidade, e que as partículas \bar{X} podem ser postas em correspondência biunívoca com elementos do espaço Euclidiano tridimensional E .

O mapeamento de B sobre uma região de E é chamado **configuração** de B . Supõe-se que este mapeamento é diferenciável tantas vezes quanto necessário, usualmente duas vezes [12].

A seqüência de configuração $\chi: B \rightarrow E_t$, definida por:

$$\underline{x} = \chi(\bar{X}, t) \quad (2.1)$$

é um **movimento** de B . \bar{X} é uma **partícula**, e \underline{x} é o lugar de E ocupado por \bar{X} no instante t . E_t é a região de E ocupada por B no instante t .

A toda parte IP de B é atribuída uma medida positiva $m(IP)$, chamada **massa** de IP . Admite-se que a distribuição de massa $m(IP)$ é uma função absolutamente contínua do volume, e

portanto pode-se definir uma **densidade de massa** ρ , tal que:

$$m(\mathbb{P}) = \int_{\mathbb{P}} \rho \, dV \quad (2.2)$$

A densidade de massa ρ , varia de uma configuração para outra, mas a massa total $m(\mathbb{P})$ se conserva, portanto

$$m(\mathbb{P}) = \int_{\mathbb{P}_1} \rho_1 \, dV = \int_{\mathbb{P}_2} \rho_2 \, dV \quad (2.3)$$

O mapeamento λ , de \mathbb{X}_1 sobre \mathbb{X}_2 é chamado **deformação** de \mathbb{B} de \mathbb{X}_1 a \mathbb{X}_2 .

Admite-se, por hipótese [13], que

$$J = \det \nabla \lambda > 0, \quad (2.4)$$

onde ∇ representa o gradiente espacial, então

$$\int_{\mathbb{P}_1} \rho_1 \, dV = \int_{\mathbb{P}_2} \rho_2 \, J \, dV,$$

e como \mathbb{P} é qualquer, tem-se

$$\rho_1 = J \, \rho_2, \quad (2.5)$$

ou seja, conhecida a densidade de massa em uma configuração, pode-se determinar esta densidade em qualquer outra configuração. A equação (2.5) expressa a conservação da massa, na forma local.

Configuração de Referência

Geralmente é conveniente escolher uma configuração particular e referir todas as grandezas a esta configuração. A escolha desta configuração é arbitrária, inclusive ela não precisa ser uma configuração ocupada pelo corpo, mas apenas uma configuração possível.

Seja κ_0 a configuração de referência, definida por

$$\underline{X} = \kappa_0(\bar{X}), \quad (2.6)$$

onde \underline{X} é o lugar ocupado pela partícula \bar{X} na configuração κ_0 . Como este mapeamento é, por hipótese, inversível, tem-se:

$$\bar{X} = \kappa_0^{-1}(\underline{X}), \quad (2.7)$$

e o movimento (2.1) referido a κ_0 é

$$\underline{x} = \underline{X}[\kappa_0^{-1}(\underline{X}), \underline{t}] = \underline{X}_0(\underline{X}, t). \quad (2.8)$$

Deste modo o movimento passa a ser entendido como uma sequência de mapeamentos da configuração de referência κ_0 , sobre a configuração atual \underline{X} , ou seja transformações de \mathbb{E} em \mathbb{E} . Com isto torna-se possível o uso de toda a ferramenta da geometria Euclidiana.

Descrição Lagrangiana

De todas as formas comumente usadas para descrição do movimento de um corpo, a mais adequada à mecânica dos sólidos é a descrição Lagrangiana: total ou atualizada.

A descrição Lagrangiana total, também chamada descrição referencial, usa como referência, uma configuração fixa κ_0 , tomando \underline{X} e t como variáveis independentes, como apresentado na equação (2.8).

A descrição Lagrangiana atualizada, ou descrição relativa, admite como referência, a configuração atual \underline{X} , expressando tudo que diz respeito à partícula \bar{X} , em um referencial móvel \underline{x} , ligado a esta partícula. Para construir esta descrição, consideram-se as configurações de \mathbb{B} nos tempos τ e t :

$$\underline{\xi} = \underline{X}(\bar{X}, \tau) \quad (2.9)$$

$$\underline{x} = \underline{X}(\bar{X}, t) \quad (2.10)$$

onde $\underline{\xi}$ é o lugar ocupado no instante τ , pela partícula \bar{X} , que no instante t ocupa a posição \underline{x} . Logo,

$$\underline{\xi} = \underline{X}[\underline{X}^{-1}(\underline{x}, t), \tau] = \underline{X}_t(\underline{x}, \tau). \quad (2.11)$$

A função \underline{X}_t é chamada função deformação relativa.

Gradiente de Deformação

O tensor \underline{F} , definido por,

$$\tilde{F} = \tilde{F}(\tilde{X}, t) = \nabla \tilde{X}_0(\tilde{X}, t) \quad (2.12)$$

é o gradiente de deformação, ou mais precisamente, gradiente de deformação de κ_0 a \tilde{X} . Conforme observado anteriormente, só são admitidos movimentos tais que,

$$\det \tilde{F} > 0 \quad (2.13)$$

O tensor \tilde{F}_t definido por

$$\tilde{F}_t = \tilde{F}_t(\tau) = \text{grad } \tilde{X}_t, \quad (2.14)$$

é o gradiente de deformação relativa; grad denota o gradiente em relação a \tilde{x} .

Mudança de Configuração de Referência

Suponha-se que o mesmo movimento (2.1) é descrito em termos de duas configurações de referências distintas, κ_1 e κ_2 , isto é:

$$\tilde{x} = \tilde{X}_1(\tilde{X}_1, t) = \tilde{X}_2(\tilde{X}_2, t) \quad (2.15)$$

onde, $\tilde{X}_1 = \kappa_1(\bar{X})$ e $\tilde{X}_2 = \kappa_2(\bar{X})$.

Logo,
$$\tilde{X}_2 = \kappa_2[\kappa_1^{-1}(\tilde{X}_1)] = \tilde{\lambda}(\tilde{X}_1), \quad (2.16)$$

e portanto, a deformação de κ_1 até \tilde{X} , pode ser realizada diretamente através do mapeamento \tilde{X}_1 ou usando $\tilde{\lambda}$ para obter \tilde{X}_2 e então usando \tilde{X}_2 para obter \tilde{X} , isto é,

$$\tilde{X}_1 = \tilde{X}_2 \tilde{\lambda}. \quad (2.17)$$

Conseqüentemente, os gradientes de deformação estão relacionados através de,

$$\tilde{F}_1 = \tilde{F}_2 \nabla \tilde{\lambda}. \quad (2.18)$$

No caso do gradiente de deformação relativa, tem-se:

$$\underline{F}(\tau) = \underline{F}_t(\tau) \underline{F}(t). \quad (2.19)$$

Decomposição polar de \underline{F}

Como \underline{F} é não singular, pelo teorema da decomposição polar [13], [14], pode-se escrever

$$\underline{F} = \underline{R} \underline{U} = \underline{V} \underline{R} \quad (2.20)$$

onde \underline{R} é um tensor ortogonal com determinante positivo (rotação), \underline{U} e \underline{V} são tensores simétricos e positivos definidos, chamados alongamentos direito e esquerdo respectivamente. Esta decomposição representada por \underline{F} , pode ser obtida a partir de três alongamentos principais, em direções mutuamente ortogonais, seguidos de uma rotação rígida, destas direções, ou realizando-se a mesma rotação primeiro e posteriormente os alongamentos. É fácil mostrar que \underline{R} , \underline{U} e \underline{V} são únicos [13].

Os tensores de deformação,

$$\underline{C} = \underline{U}^2 = \underline{F}^T \underline{F} ; \quad \underline{B} = \underline{V}^2 = \underline{F} \underline{F}^T ,$$

$$\underline{E} = \frac{1}{2} (\underline{F}^T \underline{F} - \underline{I}) = \frac{1}{2} (\underline{U}^2 - \underline{I}), \quad (2.21a,b)$$

são chamados tensores de Cauchy-Green direito e esquerdo respectivamente, e tensor de deformação de Green-Lagrange.

Campo de deslocamento

O campo vetorial $\underline{u}(\underline{X}, t)$, definido para todo $\underline{X} \in \underline{\kappa}_0$, pela relação

$$\underline{u}(\underline{X}, t) = \underline{\dot{X}}_0(\underline{X}, t) - \underline{\dot{X}} \quad (2.22a)$$

é o **campo de deslocamentos** das partículas \underline{X} do corpo \mathbb{B} , referido à configuração $\underline{\kappa}_0$.

Em termos do campo de deslocamentos \underline{u} , tem-se:

$$\underline{F} = \underline{I} + \nabla \underline{u} \quad (2.22b)$$

e conseqüentemente:

$$\begin{aligned}
\tilde{C} &= \tilde{I} + \nabla \tilde{u} + \nabla \tilde{u}^T + \nabla \tilde{u}^T \nabla \tilde{u}, \\
\tilde{B} &= \tilde{I} + \nabla \tilde{u} + \nabla \tilde{u}^T + \nabla \tilde{u} \nabla \tilde{u}^T, \\
\tilde{E} &= \frac{1}{2}(\nabla \tilde{u} + \nabla \tilde{u}^T + \nabla \tilde{u}^T \nabla \tilde{u}).
\end{aligned}
\tag{2.23a-c}$$

Os campos de velocidade e aceleração referidos à configuração κ_0 , são:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{u}}(\tilde{x}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} [\tilde{x}_0(\tilde{x}, t)], \\
\ddot{\tilde{u}}(\tilde{x}, t) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\tilde{x}_0(\tilde{x}, t)].
\end{aligned}
\tag{2.24a,b}$$

Pequenas deformações

Em elasticidade infinitesimal, define-se o tensor:

$$\tilde{\epsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \tilde{u} + \nabla \tilde{u}^T) \tag{2.25}$$

conhecido como tensor de deformação infinitesimal, e corresponde à parte linear de \tilde{E} .

Mudança de referencial

Uma mudança de referencial é um mapeamento um-a-um do espaço-tempo nele mesmo, tal que distâncias, intervalo de tempo e ordem cronológica dos eventos são preservados.

A mudança de referencial mais geral é dada por:

$$\begin{aligned}
\tilde{x}^* &= \tilde{c}(t) + \tilde{Q}(t)(\tilde{x} - \tilde{x}_0), \\
t^* &= t - a
\end{aligned}
\tag{2.26}$$

onde $\tilde{c}(t)$ é um vetor posição, variável no tempo, que representa a mudança de origem. $\tilde{Q}(t)$ é um tensor ortogonal que representa uma rotação (ou reflexão), \tilde{x}_0 é um ponto fixo e a é um escalar.

Uma grandeza é dita indiferente à mudança de referencial, se ela é invariante a toda transformação do tipo (2.26). Isto implica nas seguintes leis de transformação, de acordo com o tipo da grandeza:

$$\begin{aligned}
a^* &= a && \text{para escalares} \\
\tilde{v}^* &= \tilde{Q} \tilde{v} && \text{para vetores} \\
\tilde{S}^* &= \tilde{Q} \tilde{S} \tilde{Q}^T && \text{para tensores}
\end{aligned}$$

A mudança de coordenadas (2.26), aplicada ao movimento (2.1), conduz a

$$\tilde{x}^* = \tilde{c}(t) + \tilde{Q}(t) [\tilde{X}(\tilde{X}, t) - \tilde{x}_0]. \quad (2.27)$$

Derivando (2.27) em relação a t^* , tem-se,

$$\dot{\tilde{x}}^* = \dot{\tilde{c}}(t) + \dot{\tilde{Q}} [\tilde{X} - \tilde{x}_0] + \tilde{Q} \dot{\tilde{x}},$$

explicitando \tilde{x} em (2.27) e substituindo-o nesta última expressão obtem-se,

$$\dot{\tilde{x}}^* = \dot{\tilde{c}}(t) + \tilde{Q} \dot{\tilde{x}} + \tilde{A} (\tilde{x}^* - \tilde{c}), \quad (2.28)$$

onde $\tilde{A} = -\tilde{A}^T = \dot{\tilde{Q}} \tilde{Q}^T$. A antissimetria de \tilde{A} decorre da ortogonalidade de \tilde{Q} : $\tilde{Q}\tilde{Q}^T = \mathbf{I}$. $\dot{\tilde{c}}(t)$ representa a velocidade da origem do sistema móvel, $\tilde{Q}\dot{\tilde{x}}$ é a velocidade relativa, e \tilde{A} é a velocidade angular ou "spin" do sistema móvel em relação ao fixo.

Derivando (2.28) em relação ao tempo, após algumas substituições, obtém-se a expressão da aceleração no novo referencial,

$$\ddot{\tilde{x}}^* = \ddot{\tilde{c}} + \tilde{Q}\ddot{\tilde{x}} + 2\tilde{A}(\dot{\tilde{x}}^* - \dot{\tilde{c}}) + (\dot{\tilde{A}} - \tilde{A}^2)(\tilde{x}^* - \tilde{c}). \quad (2.29)$$

Observa-se, de (2.28) e (2.29), que velocidade e aceleração não são indiferentes a mudança de referencial.

Se os movimentos \tilde{x} e \tilde{x}^* são referidos à mesma configuração de referência, obtem-se as seguintes leis de transformação, para os tensores de deformação:

$$\begin{aligned} \tilde{F}^* &= \tilde{Q} \tilde{F}, \\ \tilde{U}^* &= \tilde{U}, \\ \tilde{V}^* &= \tilde{Q} \tilde{V} \tilde{Q}^T, \\ \tilde{E}^* &= \tilde{E}. \end{aligned} \quad (2.30a-d)$$

Portanto, apenas \tilde{V} é indiferente a mudança de referencial.

2.3. Forças

Forças e torques resultam das interações mecânicas entre as diversas partes de um corpo, ou entre o corpo e o meio ambiente. As forças estão entre os elementos primitivos da mecânica, e são admitidas como conhecidas a priori, sobre cada parte \mathbb{P} de \mathbb{B} , em cada instante t .

Serão considerados dois tipos de forças:

(1) força de massa: $\underline{f}_b(\mathbb{P})$, que são funções absolutamente contínuas do volume,

(2) forças de contato: $\underline{f}_c(\mathbb{P})$, que são funções absolutamente contínuas da área da superfície do contorno $\partial\mathbb{P}_t$ de \mathbb{P}_t .

Deste modo, pode-se escrever,

$$\underline{f}_b(\mathbb{P}) = \int_{\mathbb{P}_t} \rho \underline{b} dV, \quad (2.31)$$

$$\underline{f}_c(\mathbb{P}) = \int_{\partial\mathbb{P}_t} \underline{t} dS, \quad (2.32)$$

onde \underline{b} é a densidade de força de massa e \underline{t} é a densidade de forças de superfície ou tração.

Supõe-se a densidade de força de massa função apenas de \underline{x} e t :

$$\underline{b} = \underline{b}(\underline{x}, t) \quad (2.33)$$

e, admite-se a densidade de força de superfície do tipo tração simples, isto é,

$$\underline{t} = \underline{t}(\underline{x}, t, \underline{n}) \quad (2.34)$$

onde \underline{n} é a normal a $\partial\mathbb{P}$ na configuração $\underline{\chi}$.

A resultante $\underline{f}(\mathbb{P})$, das forças atuantes sobre \mathbb{P} na configuração $\underline{\chi}$, é

$$\underline{f}(\mathbb{P}) = \underline{f}_b(\mathbb{P}) + \underline{f}_c(\mathbb{P}) \quad (2.35)$$

O momento resultante $\underline{M}(\mathbb{P}, \underline{x}_0)$, em relação a \underline{x}_0 é,

$$\underline{\underline{M}}(\mathbb{P}, \underline{\underline{x}}_0) = \int_{\mathbb{P}_t} (\underline{\underline{x}} - \underline{\underline{x}}_0) \wedge \rho \underline{\underline{b}} dV + \int_{\partial \mathbb{P}_t} (\underline{\underline{x}} - \underline{\underline{x}}_0) \wedge \underline{\underline{t}} ds \quad (2.36)$$

Definindo quantidade de movimento linear,

$$\underline{\underline{L}}(\mathbb{P}) = \int_{\mathbb{P}_t} \dot{\underline{\underline{x}}} \rho dV, \quad (2.37)$$

quantidade de movimento angular,

$$\underline{\underline{H}}(\mathbb{P}, \underline{\underline{x}}_0) = \int_{\mathbb{P}_t} (\underline{\underline{x}} - \underline{\underline{x}}_0) \wedge \dot{\underline{\underline{x}}} \rho dV \quad (2.38)$$

e considerando os princípios de conservação das quantidades de movimento linear e angular, tem-se:

$$\dot{\underline{\underline{L}}}(\mathbb{P}) = \underline{\underline{f}}(\mathbb{P}) \quad (2.39)$$

$$\dot{\underline{\underline{H}}}(\mathbb{P}, \underline{\underline{x}}_0) = \underline{\underline{M}}(\mathbb{P}, \underline{\underline{x}}_0) \quad (2.40)$$

Pelo lema fundamental de Cauchy, existe um tensor $\underline{\underline{T}}(\underline{\underline{x}}, t)$, chamado tensor de tensões de Cauchy, tal que

$$\underline{\underline{t}}(\underline{\underline{x}}, t, \underline{\underline{n}}) = \underline{\underline{T}}(\underline{\underline{x}}, t) \underline{\underline{n}}, \quad (2.41)$$

isto é, a tração $\underline{\underline{t}}$ é uma função linear e homogênea da normal $\underline{\underline{n}}$.

De (2.39), (2.40) e (2.41), resultam:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\mathbb{P}_t} \rho \dot{\underline{\underline{x}}} dV \right) = \int_{\partial \mathbb{P}_t} \underline{\underline{T}} \underline{\underline{n}} ds + \int_{\mathbb{P}_t} \rho \underline{\underline{b}} dV, \quad (2.42)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\mathbb{P}_t} (\underline{\underline{x}} - \underline{\underline{x}}_0) \wedge \rho \dot{\underline{\underline{x}}} dV \right) = \int_{\partial \mathbb{P}_t} (\underline{\underline{x}} - \underline{\underline{x}}_0) \wedge \underline{\underline{T}} \underline{\underline{n}} ds + \int_{\mathbb{P}_t} (\underline{\underline{x}} - \underline{\underline{x}}_0) \wedge \rho \underline{\underline{b}} dV, \quad (2.43)$$

para toda parte \mathbb{P} de \mathbb{B} .

Supondo o campo $\underline{\underline{T}}(\underline{\underline{x}}, t)$, suficientemente regular, e em consequência do teorema da divergência, a equação (2.42) é equi

valente a

$$\rho \ddot{\underline{x}} = \operatorname{div} \underline{T} + \rho \underline{b}, \quad (2.44)$$

que é a forma local do princípio da conservação da quantidade de movimento linear, ou a primeira lei de Cauchy para a mecânica do contínuo.

Sendo satisfeita (2.44), a equação (2.43) é equivalente a

$$\underline{T} = \underline{T}^T \quad (2.45)$$

ou seja, o tensor de tensões de Cauchy é simétrico.

Esta equação é chamada segunda lei de Cauchy para a mecânica do contínuo e expressa localmente o balanço da quantidade de movimento angular.

Processo dinâmico

Dado o **sistema de forças** $(\underline{t}, \underline{b})$, atuando sobre um corpo \mathbb{B} numa configuração $\underline{\chi}$, diz-se que o movimento deste corpo e as forças atuantes sobre ele na correspondente configuração constituem um **processo dinâmico** se as leis de Cauchy (2.44) e (2.45) são satisfeitas. Teoricamente, qualquer par de funções $(\underline{\chi}, \underline{T})$, onde $\underline{\chi}$ é um movimento e \underline{T} é um campo de tensões simétrico e regular, pode constituir um processo dinâmico, pois será sempre possível obter um sistema de força tal que a equação (2.44) seja satisfeita.

Pressupõe-se que força de massa e força de contato são indiferentes a mudança de referencial, isto é:

$$\underline{b}^* = \underline{Q} \underline{b} \quad \text{e} \quad \underline{t}^* = \underline{Q} \underline{t}, \quad (2.46)$$

e, como consequência direta do lema fundamental de Cauchy (2.41), o tensor \underline{T} é também indiferente, ou seja,

$$\underline{T}^* = \underline{Q} \underline{T} \underline{Q}^T \quad (2.47)$$

Diz-se que dois processos dinâmicos $(\underline{\chi}, \underline{T})$ e $(\underline{\chi}^*, \underline{T}^*)$ são equivalentes, se eles constituem o mesmo processo visto por

observadores diferentes. Ou seja, $\tilde{\chi}^*$ e $\tilde{\chi}$ estão relacionados por (2.26) e \tilde{T}^* e \tilde{T} estão relacionados por (2.47).

Tensor de tensões de Piola-Kirchhoff

Em problemas de mecânica dos sólidos é usual a descrição em termos de uma configuração de referência fixa, ou descrição lagrangiana total, conforme visto anteriormente. Para tanto, escrevem-se as forças de contato sobre \mathbb{P}_0 , em termos da tração \tilde{t}_0 sobre o contorno $\partial\mathbb{P}_0$ de \mathbb{P} , na configuração fixa κ_0 ,

$$\tilde{f}_c(\mathbb{P}) = \int_{\partial\mathbb{P}_t} \tilde{t} \, ds(\tilde{x}) = \int_{\partial\mathbb{P}_0} \tilde{t}_0 \, ds(\tilde{X}). \quad (2.48)$$

Portanto \tilde{t}_0 é paralelo a \tilde{t} , mas com módulo ajustado de acordo com a variação da área,

$$\tilde{t}_0 = \frac{ds(\tilde{x})}{ds(\tilde{X})} \tilde{t}.$$

Pelo lema fundamental de Cauchy, existe um tensor \tilde{T}_0 , tal que

$$\tilde{t}_0 = \tilde{T}_0 \tilde{n}_0 = \frac{ds(\tilde{x})}{ds(\tilde{X})} \tilde{T} \tilde{n}, \quad (2.49)$$

onde \tilde{n}_0 é a normal externa em \tilde{X} na configuração κ_0 , que está relacionada com \tilde{n} , pela equação,

$$\tilde{n} \, ds(\tilde{x}) = (\det \tilde{F})(\tilde{F}^T)^{-1} \tilde{n}_0 \, ds(\tilde{X}). \quad (2.50)$$

De (2.49) e (2.50) obtém-se,

$$\tilde{T}_0 = (\det \tilde{F}) \tilde{T}(\tilde{F}^T)^{-1}, \quad (2.51)$$

que é chamado primeiro tensor de Piola-Kirchhoff.

O segundo tensor de Piola-Kirchhoff, \tilde{S} , é definido como,

$$\tilde{S} = (\det \tilde{F}) \tilde{F}^{-1} \tilde{T}(\tilde{F}^T)^{-1} = \tilde{F}^{-1} \tilde{T}_0. \quad (2.52)$$

Nota-se que \tilde{S} é simétrico, enquanto que \tilde{T}_0 não é, neces

sariamente, simétrico.

Referidas à configuração $\underline{\chi}_0$, as leis de Cauchy são:

$$\rho_0 \ddot{\underline{u}} = \text{Div } \underline{T}_0 + \rho_0 \underline{b}; \quad \underline{T}_0 \underline{F}^T = (\underline{T}_0 \underline{F}^T)^T, \quad (2.53)$$

onde Div indica divergência em relação a $\underline{\chi}$, e ρ_0 , $\ddot{\underline{u}}$, \underline{T}_0 e \underline{b} são funções de $\underline{\chi}$ e t .

2.4. Equações Constitutivas

Equações constitutivas mecânicas são relações entre forças e movimentos.

Observa-se que a aplicação de forças aos corpos provocam movimentos, e que os movimentos produzidos dependem, entre outras coisas, da natureza dos corpos. Isto é, a resposta de um dado corpo depende das propriedades físicas do material que constitui o corpo. Supõe-se que estas propriedades possam ser determinadas, aproximadamente, através de experiências de laboratório.

Em mecânica do contínuo as forças de interesse são as de contato, que estão relacionadas com o tensor de tensões, pelo lema fundamental de Cauchy. Portanto, uma equação constitutiva da mecânica do contínuo é uma relação entre o tensor simétrico \underline{T} e o movimento $\underline{\chi}$, definido anteriormente. $(\underline{\chi}, \underline{T})$ deve ser um processo dinâmico de um corpo \mathbb{B} , constituído de um material ideal, que representa uma classe de materiais reais com comportamentos semelhantes.

Além de ser compatível com as leis do movimento, uma equação constitutiva deve satisfazer a certos axiomas, tais como, princípio do determinismo, princípio da indiferença material e princípio da ação local.

a) Princípio do determinismo. A tensão em uma partícula $\underline{\bar{X}}$ de um corpo \mathbb{B} , no instante t é determinada pela história $\underline{\chi}^t$ do movimento de \mathbb{B} , até o presente:

$$\underline{T}(\underline{\bar{X}}, t) = \underline{F}(\underline{\chi}^t, \underline{\bar{X}}, t) \quad (2.54)$$

Por história $\underline{\chi}^t$, de uma função f , entende-se:

$$f^t(\tau) = f(t - \tau), \forall \tau > 0 \text{ e } t \text{ fixo.} \quad (2.55)$$

O funcional \underline{F} é chamado funcional constitutivo, e (2.54) é a equação constitutiva de um material ideal. Por este postulado, o passado e o presente influenciam o estado de tensão atual, mas o futuro não afeta o presente.

b) Princípio da indiferença material. As equações constitutivas são indiferentes a mudanças de referencial.

Considerando que \underline{T} é um tensor indiferente, tem-se,

$$\underline{T}(\underline{\bar{X}}, t)^* = \underline{F}[(\underline{\chi}^{t*})^*, \underline{\bar{X}}, t^*] = \underline{Q} \underline{F}[\underline{\chi}^t, \underline{\bar{X}}, t] \underline{Q}^T \quad (2.56)$$

onde $(\underline{\chi}^*, \underline{T}^*)$ e $(\underline{\chi}, \underline{T})$ são processos dinâmicos equivalentes. De acordo com este princípio as propriedades do material não variam com a mudança de observador.

c) Princípio da ação local. O movimento das partículas, Z que estão a uma distância finita da partícula $\underline{\bar{X}}$, em qualquer configuração, pode ser desprezado no cálculo da tensão em $\underline{\bar{X}}$. Formalmente pode-se escrever,

$$\underline{F}(\underline{\bar{X}}^t, \underline{\bar{X}}, t) = \underline{F}(\underline{\chi}^t, \underline{\bar{X}}, t) \quad (2.57)$$

onde

$$\underline{\bar{X}}^t(Z, \tau) = \underline{\chi}^t(Z, \tau), \text{ para } \tau > 0 \text{ e } Z \in N(\underline{\bar{X}}), \quad (2.58)$$

sendo $N(\underline{\bar{X}})$, qualquer vizinhança de $\underline{\bar{X}}$.

Materiais Simples

Um movimento é homogêneo em relação a configuração de referência κ , se

$$\underline{x} = \underline{x}_\kappa(\underline{x}, t) = \underline{x}_0(t) + \underline{F}(t)(\underline{x} - \underline{x}_0) \quad (2.59)$$

onde $\underline{x}_0(t)$ é um ponto de $\underline{\chi}$, \underline{x}_0 é um ponto fixo em κ , e $\underline{F}(t)$, gradiente de deformação, é independente de \underline{x} .

Materiais simples, são aqueles cujas propriedades constitutivas, podem ser determinadas realizando-se experiências com

deformações homogêneas, apenas. Como toda deformação é localmente homogênea, as equações constitutivas de materiais simples são da forma,

$$\underline{T}(\underline{X}, t) = \underline{F}(\chi^t, \underline{X}, t) = \underline{F}[\underline{F}^t(\underline{\chi}, \tau), \underline{X}]. \quad (2.60)$$

Isto é, a tensão depende apenas da história do gradiente de deformação de \underline{X} , com relação a uma configuração fixa $\underline{\kappa}$.

Observa-se, que os materiais simples satisfazem, a priori, os princípios de determinismo e ação local, porém não necessariamente o princípio da indiferença material.

Materiais elásticos

Um caso particular de materiais simples são os materiais elásticos, nos quais a tensão em uma partícula \underline{X} , no instante t é determinada pelo gradiente de deformação de \underline{X} no instante t , isto é,

$$\underline{T}(\underline{X}, t) = \hat{\underline{T}}(\underline{F}, \underline{X}) \quad (2.61)$$

onde $\hat{\underline{T}}$ é uma função tensorial.

Neste caso, o princípio de indiferença material impõe a condição:

$$\hat{\underline{T}}(\underline{Q} \underline{F}) = \underline{Q} \hat{\underline{T}}(\underline{F}) \underline{Q}^T \quad (2.62)$$

para todo \underline{F} , com $\det \underline{F} > 0$, e toda rotação \underline{Q} .

Resolvendo (2.62) em $\hat{\underline{T}}(\underline{F})$, e considerando que $\underline{F} = \underline{R} \underline{U}$, obtém-se

$$\hat{\underline{T}}(\underline{F}) = \underline{Q}^T \hat{\underline{T}}(\underline{Q} \underline{R} \underline{U}) \underline{Q} \quad (2.63)$$

Como esta equação deve ser satisfeita para toda rotação \underline{Q} , em particular, para $\underline{Q} = \underline{R}^T$, tem-se,

$$\hat{\underline{T}}(\underline{F}) = \underline{R} \hat{\underline{T}}(\underline{U}) \underline{R}^T, \quad (2.64)$$

que é chamada forma reduzida, da equação constitutiva de materiais elásticos. Portanto a função resposta $\hat{\underline{T}}$ é completamente de

terminada por sua restrição ao conjunto dos tensores simétricos e positivos definidos, uma vez que $\underline{\underline{U}}$ é simétrico e positivo definido.

Outras formas reduzidas, podem ser obtidas, tais como:

$$\hat{\underline{\underline{T}}}(\underline{\underline{F}}) = \underline{\underline{R}} \tilde{\underline{\underline{T}}}(\underline{\underline{C}}) \underline{\underline{R}}^T,$$

$$\hat{\underline{\underline{T}}}(\underline{\underline{F}}) = \underline{\underline{F}} \hat{\underline{\underline{T}}}(\underline{\underline{U}}) \underline{\underline{F}}^T,$$

$$\hat{\underline{\underline{T}}}(\underline{\underline{F}}) = \underline{\underline{F}} \overline{\underline{\underline{T}}}(\underline{\underline{C}}) \underline{\underline{F}}^T. \quad (2.65a-c)$$

Em termos do segundo tensor de Piola-Kirchhoff, a equação constitutiva (2.61) toma a forma:

$$\underline{\underline{S}}(\underline{\underline{X}}, t) = \hat{\underline{\underline{S}}}(\underline{\underline{F}}, \underline{\underline{X}}), \quad (2.66)$$

e a equação (2.62), que expressa a condição de indiferença material, torna-se:

$$\hat{\underline{\underline{S}}}(\underline{\underline{Q}} \underline{\underline{F}}) = \hat{\underline{\underline{S}}}(\underline{\underline{F}}) \quad (2.67)$$

Observa-se que $\hat{\underline{\underline{T}}}(\underline{\underline{F}})$ e $\hat{\underline{\underline{S}}}(\underline{\underline{F}})$, estão relacionados por,

$$\hat{\underline{\underline{T}}}(\underline{\underline{F}}) = \frac{\rho_0}{\rho} \underline{\underline{F}} \hat{\underline{\underline{S}}}(\underline{\underline{F}}) \underline{\underline{F}}^T \quad (2.68)$$

Materiais elásticos isotrópicos

Um material elástico é isotrópico, se existe uma configuração κ , tal que a função $\hat{\underline{\underline{T}}}(\underline{\underline{F}})$, referida a esta configuração, é isotrópica. Isto é:

$$\hat{\underline{\underline{T}}}(\underline{\underline{Q}} \underline{\underline{F}} \underline{\underline{Q}}^T) = \underline{\underline{Q}} \hat{\underline{\underline{T}}}(\underline{\underline{F}}) \underline{\underline{Q}}^T \quad (2.69)$$

para todo gradiente de deformação $\underline{\underline{F}}$, a partir de κ , e todo $\underline{\underline{Q}}$ ortogonal.

As formas reduzidas correspondentes a (2.64) e (2.65), para materiais elásticos isotrópicos são:

$$\begin{aligned} \hat{\underline{\underline{T}}}(\underline{\underline{F}}) &= \hat{\underline{\underline{T}}}(\underline{\underline{V}}), \\ \hat{\underline{\underline{T}}}(\underline{\underline{F}}) &= \hat{\underline{\underline{T}}}(\underline{\underline{B}}), \end{aligned} \quad (2.70)$$

onde \hat{T} e \tilde{T} são funções isotrópicas.

Usando os teoremas de representação de funções isotrópicas, pode-se escrever, [12], [13]:

$$\tilde{T}(\underline{B}) = \beta_1 \underline{I} + \beta_2 \underline{B} + \beta_3 \underline{B}^2, \quad (2.71)$$

ou ainda,

$$\tilde{T}(\underline{B}) = \phi_1 \underline{I} + \phi_2 \underline{B} + \phi_3 \underline{B}^{-1}, \quad (2.72)$$

onde os β_i e ϕ_i são funções escalares dos invariantes de \underline{B} . Expressões análogas existem para $\hat{T}(V)$.

2.5. O problema de resposta dinâmica

As equações derivadas anteriormente definem formalmente, o problema geral de resposta dinâmica de um corpo elástico, apresentado a seguir sob diferentes formas.

a) Forma diferencial (descrição Lagrangiana atualizada).

Dado o corpo elástico \mathbb{B} , de densidade ρ , sob a ação do sistema de forças $(\underline{t}, \underline{b})$ determinar o processo dinâmico $(\underline{u}, \underline{T})$ compatível com,

a.1 - equações de movimento,

$$\text{div} \underline{T} + \rho \underline{b} = \rho \ddot{\underline{u}}, \quad \underline{T}^T = \underline{T}; \quad (2.73)$$

a.2 - equações cinemáticas,

$$\underline{C} = \underline{F}^T \underline{F}; \quad \underline{F} = \underline{R} \underline{U} = \underline{I} + \nabla \underline{u}; \quad (2.74)$$

a.3 - equação constitutiva do tipo,

$$\underline{T} = \underline{R} \tilde{T}(\underline{C}) \underline{R}^T; \quad (2.75)$$

a.4 - condições iniciais

$$\left. \begin{aligned} \underline{u}(\underline{x}, 0) &= \underline{u}_0(\underline{x}) \\ \dot{\underline{u}}(\underline{x}, 0) &= \underline{v}_0(\underline{x}) \end{aligned} \right\} \forall \underline{x} \in \mathbb{B}_{t_0}; \quad (2.76)$$

a.5 - *condições de contorno; definidas em $\partial \mathbb{B}_t$:*

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{\bar{u}}(\underline{x}, t) \text{ em } S_1 \times [0, T],$$

$$\underline{T}_n = \underline{\bar{T}} \text{ em } S_2 \times [0, T], \quad (2.77a,b)$$

sendo $S_1 \cup S_2 = \partial \mathbb{B}_t$.

Não existem teoremas gerais que garantam a existência e unicidade de solução do problema proposto [12]. Inclusive alguns contra-exemplos demonstram a possibilidade de existênciad e mais de uma solução deste problema. Portanto, não se pode esperar unicidade a não ser em casos particulares. Prova-se a unicidade no caso de elãsticidade infinitesimal, e no caso de cargas que tendem a zero.

A forma variacional, ou forma fraca do problema(a) é obtida a partir do princípio dos trabalhos virtuais (PTV). Para tanto, define-se:

- campo de deslocamentos admissíveis -

o campo vetorial $\underline{u}(\underline{x}, t)$ definido em \mathbb{B}_t é um campo de deslocamentos admissíveis, se

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{\bar{u}}(\underline{x}, t) \text{ em } S_1,$$

- conjunto cinemãticamente admissível -

$$\text{Kin} = \{\underline{u}(\underline{x}, t), \text{ tq } \underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{\bar{u}}(\underline{x}, t) \text{ em } S_1\}$$

- espaço de variações admissíveis -

$$\text{Var} = \{\hat{\underline{u}}(\underline{x}, t), \text{ tq } \hat{\underline{u}}(\underline{x}, t) = \underline{0} \text{ em } S_1\}$$

O deslocamento $\hat{\underline{u}}$, é chamado deslocamento virtual, e o trabalho realizado sobre $\hat{\underline{u}}$ é o trabalho virtual.

Portanto, o trabalho virtual das forças externas, incluindo as forças de inércia é,

$$\hat{W} = \int_{\partial \mathbb{B}_t} \underline{t} \cdot \hat{\underline{u}} \, ds + \int_{\mathbb{B}_t} \rho \underline{b} \cdot \hat{\underline{u}} \, dV - \int_{\mathbb{B}_t} \rho \ddot{\underline{u}} \cdot \hat{\underline{u}} \, dV. \quad (2.78)$$

Pelo lema fundamental de Cauchy, tem-se

$$\int_{\partial \mathbb{B}_t} \underline{\underline{t}} \cdot \hat{\underline{\underline{u}}} \, ds = \int_{\partial \mathbb{B}_t} \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{n}} \cdot \hat{\underline{\underline{u}}} \, ds = \int_{\mathbb{B}_t} \underline{\underline{n}} \cdot \underline{\underline{T}}^T \hat{\underline{\underline{u}}} \, ds, \quad (2.79)$$

e usando o teorema da divergência, pode-se escrever:

$$\int_{\partial \mathbb{B}_t} \underline{\underline{t}} \cdot \hat{\underline{\underline{u}}} \, ds = \int_{\mathbb{B}_t} \operatorname{div} \underline{\underline{T}} \cdot \hat{\underline{\underline{u}}} \, dV + \int_{\mathbb{B}_t} \underline{\underline{T}} \cdot \operatorname{grad} \hat{\underline{\underline{u}}} \, dV \quad (2.80)$$

Levando (2.80) a (2.79), obtém-se:

$$\hat{W} = \int_{\mathbb{B}_t} (\operatorname{div} \underline{\underline{T}} + \rho \underline{\underline{b}} - \rho \underline{\underline{u}}) \cdot \hat{\underline{\underline{u}}} \, dV + \int_{\mathbb{B}_t} \underline{\underline{T}} \cdot \operatorname{grad} \hat{\underline{\underline{u}}} \, dV. \quad (2.81)$$

Como a primeira integral que aparece em (2.81) é identicamente nula, resulta finalmente,

$$\hat{W} = \int_{\mathbb{B}_t} \underline{\underline{T}} \cdot \operatorname{grad} \hat{\underline{\underline{u}}} \, dV, \quad (2.82)$$

que é a expressão do princípio dos trabalhos virtuais.

b) Forma Variacional (descrição Lagrangiana atualizada)

Dado o corpo elástico \mathbb{B} , de densidade ρ , sujeito a ação do sistema de forças $(\underline{\underline{t}}, \underline{\underline{b}})$, determinar o processo dinâmico $(\underline{\underline{u}}, \underline{\underline{T}})$, $\underline{\underline{u}}(\underline{\underline{x}}, t) \in \text{Kin}$ e $\underline{\underline{T}}$ simétrico, satisfazendo à equação constitutiva (2.75), às condições iniciais (2.76), é a expressão do princípio dos trabalhos virtuais:

$$\int_{\mathbb{B}_t} \rho \underline{\underline{u}} \cdot \hat{\underline{\underline{u}}} \, dV + \int_{\mathbb{B}_t} \underline{\underline{T}} \cdot \operatorname{grad} \hat{\underline{\underline{u}}} \, dV = \int_{\partial \mathbb{B}_t} \underline{\underline{t}} \cdot \hat{\underline{\underline{u}}} \, ds + \int_{\mathbb{B}_t} \rho \underline{\underline{b}} \cdot \hat{\underline{\underline{u}}} \, dV \quad (2.83)$$

para todo $\hat{\underline{\underline{u}}} \in \text{Var}$.

Esta forma variacional é mais adequada à obtenção de soluções aproximadas do que a forma diferencial, uma vez que (2.83) fornece automaticamente um critério de aproximação. Além disto, o conjunto de soluções admissíveis foi ampliado, pois (2.83) exige menos regularidade que (2.73), daí a razão das terminologias: "forma fraca" e "forma forte". Sob iguais condições de regularidades os problemas são equivalentes e as soluções coincidem pontualmente, caso contrário as soluções coincidem em quase toda parte, isto é, coincidem em todo domínio \mathbb{B}_t a

menos de um conjunto de medida zero.

Conforme observado anteriormente, em problemas de mecânica dos sólidos, normalmente é mais conveniente referir todas as grandezas a uma configuração fixa, κ_0 .

Referida a esta configuração a expressão (2.82) do PTV é:

$$\hat{W}_{ext} = \int_{\mathbb{B}_0} \underline{\underline{T}}_0 \cdot \nabla \underline{\underline{u}} \, dV_0 \quad (2.84)$$

onde $\underline{\underline{T}}_0$ é o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff e $\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{u}}(\underline{\underline{X}}, t)$.

Introduzindo o segundo tensor de Piola, $\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{T}}_0$, definido em (2.52), tem-se:

$$\hat{W}_{ext} = \int_{\mathbb{B}_0} \underline{\underline{F}} \underline{\underline{S}} \cdot \nabla \hat{\underline{\underline{u}}} \, dV_0 = \int_{\mathbb{B}_0} \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{F}}^T \nabla \hat{\underline{\underline{u}}} \, dV_0, \quad (2.85)$$

que pode ser escrita na forma,

$$\hat{W}_{ext} = \int_{\mathbb{B}_0} \underline{\underline{S}} \cdot \hat{\underline{\underline{E}}} \, dV_0, \quad (2.86)$$

onde,

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{\underline{u}} + \nabla \underline{\underline{u}}^T + \nabla \underline{\underline{u}}^T \nabla \underline{\underline{u}}),$$

é o tensor de Green-Lagrange referido a configuração fixa κ_0 .

Referido a esta configuração o problema (b) pode ser formulado do seguinte modo

c) Forma Variacional (descrição Lagrangiana total).

Dado o corpo \mathbb{B} , com densidade ρ_0 , sujeito ao sistema de forças $(\underline{\underline{t}}_0, \underline{\underline{b}})$, determinar o processo dinâmico $(\underline{\underline{u}}, \underline{\underline{S}})$, $\underline{\underline{u}}(\underline{\underline{X}}, t) \in \text{Kin}$ e $\underline{\underline{S}}$ simétrico, satisfazendo a:

c.1 - expressão do PTV:

$$\int_{\mathbb{B}_0} \rho_0 \ddot{\underline{\underline{u}}} \cdot \hat{\underline{\underline{u}}} \, dV_0 + \int_{\partial \mathbb{B}_0} \underline{\underline{S}} \cdot \hat{\underline{\underline{E}}} \, dV_0 = \int_{\mathbb{B}_0} \underline{\underline{t}}_0 \cdot \hat{\underline{\underline{u}}} \, ds_0 + \int_{\mathbb{B}_0} \rho_0 \underline{\underline{b}} \cdot \hat{\underline{\underline{u}}} \, dV_0, \quad (2.87)$$

para todo $\hat{\underline{\underline{u}}}(\underline{\underline{X}}, t) \in \text{Var}$,

c.2 - equação constitutiva,

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{\tilde{S}}}(\underline{\underline{E}}) \quad (2.88)$$

c.3 - condições iniciais:

$$\left. \begin{aligned} \underline{\underline{u}}(\underline{\underline{X}}, 0) &= \underline{\underline{u}}_0(\underline{\underline{X}}) \\ \underline{\underline{\dot{u}}}(\underline{\underline{X}}, 0) &= \underline{\underline{v}}_0(\underline{\underline{X}}) \end{aligned} \right\} \forall \underline{\underline{X}} \in \mathbb{B}_0. \quad (2.89)$$

Notar, que neste caso a equação constitutiva deve ser expressa em termos de $\underline{\underline{S}}$ e não em termos de $\underline{\underline{T}}$. Os conjuntos Kin e Var são definidos em termos de $\underline{\underline{u}}(\underline{\underline{X}})$ e $\underline{\underline{\dot{u}}}(\underline{\underline{X}})$, referidos à configuração fixa $\underline{\underline{K}}_0$.

d) Forma Variacional incremental

O problema geral da elastodinâmica é fortemente não linear. A não linearidade decorre da consideração de grandes deformações, e da equação constitutiva. Os métodos de resolução de problemas não lineares, geralmente implicam num processo de perturbação, onde o problema não linear é decomposto numa sequência de problemas lineares, ou melhor, linearizados.

Em teoria da elasticidade é comum considerar a forma incremental linearizada das equações do movimento, correspondente a pequenas perturbações sobre um estado inicial conhecido. Esta forma incremental tanto pode ser usada para obtenção de soluções aproximadas, como no estudo de estabilidade elástica infinitesimal, estática ou dinâmica.

O esquema incremental, visando a obtenção de solução aproximada num intervalo fechado $[0, T]$, pode ser construído da seguinte maneira [19], [20], [21]. O intervalo $[0, T]$ é dividido em N intervalos $\Delta t = T/N$. Supondo que o processo dinâmico, $(\underline{\underline{u}}_i, \underline{\underline{S}}_i)$, é conhecido nos instantes discretos: $t_i = i\Delta t$, $i=0,1,2,\dots,n$, procura-se determinar $(\underline{\underline{u}}_{n+1}, \underline{\underline{S}}_{n+1})$, correspondente ao instante seguinte, $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$.

Portanto, tem-se:

$$\underline{\underline{u}}_{n+1}(\underline{\underline{X}}) = \underline{\underline{u}}_n(\underline{\underline{X}}) + \underline{\underline{u}}(\underline{\underline{X}}),$$

$$\underline{S}_{n+1}(\underline{X}) = \underline{S}_n(\underline{X}) + \underline{S}(\underline{X}),$$

$$\underline{E}_{n+1}(\underline{X}) = \underline{E}_n(\underline{X}) + \underline{\varepsilon}(\underline{X}) + \underline{\eta}(\underline{X}), \quad (2.90a-c)$$

onde \underline{u}_{n+1} , \underline{S}_{n+1} , \underline{E}_{n+1} são os campos de deslocamento, tensão e deformação incógnitos, na configuração $\underline{\chi}_{n+1}$, e referidos a configuração fixa $\underline{\chi}_0$. \underline{u} e \underline{S} são acréscimos de deslocamento e tensão de $\underline{\chi}_n$ para $\underline{\chi}_{n+1}$. $\underline{\varepsilon}$ e $\underline{\eta}$ são respectivamente a parte linear e não linear, do acréscimo de deformação, em termos do acréscimo de deslocamento:

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T + \nabla \underline{u}_n^T \nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T \nabla \underline{u}_n)$$

$$\underline{\eta} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{u}^T \nabla \underline{u}) \quad (2.91a,b)$$

Partindo da expressão do PTV correspondente à configuração $\underline{\chi}_{n+1}$,

$$\int_{\mathbb{B}_0} \underline{S}_{n+1} \cdot \hat{\underline{E}}_{n+1} dV_0 = \int_{\mathbb{B}_0} (\underline{S}_n + \underline{S}) \cdot (\hat{\underline{\varepsilon}} + \hat{\underline{\eta}}) dV_0 = \hat{\underline{W}}_{n+1} \quad (2.92)$$

e, tomando a aproximação linear da equação constitutiva (2.88), a partir de $\underline{\chi}_n$,

$$\underline{S} = \underline{L}_n [\underline{\varepsilon}],$$

obtem-se a forma incremental linearizada da expressão do PTV, .

$$\int_{\mathbb{B}_0} \underline{L}_n [\underline{\varepsilon}] \cdot \hat{\underline{\varepsilon}} dV_0 + \int_{\mathbb{B}_0} \underline{S}_n \cdot \hat{\underline{\eta}} dV_0 = \hat{\underline{W}}_{n+1} - \int_{\mathbb{B}_0} \underline{S}_n \cdot \hat{\underline{\varepsilon}} dV_0. \quad (2.93)$$

A solução de (2.93), fornece uma primeira aproximação dos incrementos de deslocamentos e tensão (\underline{u} , \underline{S}). Aproximações superiores, podem ser obtidas realizando-se iterações dentro de cada incremento. Para tanto, define-se:

$$\underline{u}_{n+1}^{(k)} = \underline{u}_{n+1}^{(k-1)} + \underline{u}^{(k)}, \quad k = 1, 2, 3 \dots \quad (2.94)$$

onde,

$$\underline{u}_{n+1}^{(0)} = \underline{u}_n \quad \text{e} \quad \underline{u}_{n+1}^{(1)} = \underline{u}.$$

Pode-se, então, construir a forma iterativa

$$\int_{\mathbb{B}_0} \underline{L}_{n+1}^{(k)}[\underline{\varepsilon}^{(k)}] \cdot \hat{\underline{\varepsilon}}^{(k)} dV_0 + \int_{\mathbb{B}_0} \underline{S}_{n+1}^{(k-1)} \cdot \hat{\underline{\eta}} dV_0 = \hat{\underline{W}}_{n+1}^{(k)} - \int_{\mathbb{B}_0} \underline{S}_{n+1}^{(k-1)} \cdot \hat{\underline{\varepsilon}}^{(k)} dV_0, \quad (2.95)$$

em que k é a ordem da iteração que está sendo realizada. Convergência é atingida quando $\|\underline{u}^{(k)}\|$ for menor que uma tolerância fixada.

Do ponto de vista computacional é mais conveniente um esquema iterativo simples, onde apenas o termo independente da equação é modificado de uma iteração para outra, ou seja,

$$\int_{\mathbb{B}_0} \underline{L}_n[\underline{\varepsilon}] \cdot \hat{\underline{\varepsilon}} dV_0 + \int_{\mathbb{B}_0} \underline{S}_n \cdot \hat{\underline{\eta}} dV_0 = \hat{\underline{W}}_{n-1}^{(k)} - \int_{\mathbb{B}_0} \underline{S}_{n+1}^{(k-1)} \cdot \hat{\underline{\varepsilon}} dV_0 \quad (2.96)$$

Substituindo $\hat{\underline{W}}_{n+1}$ pela sua expressão, pode-se escrever (2.96) na forma explícita:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}_0} \rho_0 \ddot{\underline{u}}_{n+1}^{(k)} \cdot \hat{\underline{u}} dV_0 + \int_{\mathbb{B}_0} \underline{L}_n[\underline{\varepsilon}] \cdot \hat{\underline{\varepsilon}} dV_0 + \int_{\mathbb{B}_0} \underline{S}_n \cdot \hat{\underline{\eta}} dV_0 = \\ \int_{\partial \mathbb{B}_0} \underline{t}_0 \cdot \hat{\underline{u}} dS_0 + \int_{\mathbb{B}_0} \rho_0 \underline{b} \cdot \hat{\underline{u}} dV_0 - \int_{\mathbb{B}_0} \underline{S}_{n+1}^{(k-1)} \cdot \hat{\underline{\varepsilon}} dV_0. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Que é uma expressão comumente usada na obtenção de soluções aproximadas. No capítulo IV serão obtidas aproximações de elementos finitos, correspondentes a esta expressão, visando o estudo de um problema específico de vibrações de cascas axisimétricas.

2.6. Estabilidade dinâmica

O problema de estabilidade, consiste em determinar se o processo dinâmico $(\underline{u}, \underline{\dot{u}})$, definido em $\mathbb{B}_0 \times [0, \infty)$, compatível com as leis fundamentais da mecânica, e satisfazendo às condições de contorno e às condições iniciais $(\underline{u}_0, \underline{\dot{u}}_0)$, é ou não estável a pequenas perturbações nas condições iniciais $(\underline{u}_0, \underline{\dot{u}}_0)$.

Entendendo-se estabilidade no sentido de Liapunov, pode-se afirmar que $(\underline{\bar{u}}, \underline{\bar{S}})$ é estável, se todo processo dinâmico compatível $(\underline{u}, \underline{S})$, com condições iniciais $(\underline{u}_0, \underline{v}_0)$, permanece próximo a $(\underline{\bar{u}}, \underline{\bar{S}})$ para todo $t > 0$.

Formalmente, diz-se que $(\underline{\bar{u}}, \underline{\bar{S}})$ é estável segundo Liapunov se:

a) Existe um número positivo γ , suficientemente pequeno tal que, para todo $(\underline{u}_0, \underline{v}_0)$ satisfazendo a condição:

$$\|\underline{u}_0 - \underline{\bar{u}}_0\|_0 + \|\underline{v}_0 - \underline{\bar{v}}_0\|_0 < \gamma,$$

o processo $(\underline{u}, \underline{S})$, correspondente a $(\underline{u}_0, \underline{v}_0)$, é determinado, para todo $t > 0$.

Onde,

$$\|\underline{u}\|_0 = \int_{\mathbb{B}_0} \underline{u} \cdot \underline{u} \, dV_0.$$

b) Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta < \gamma$, tal que, para

$$\|\underline{u}_0 - \underline{\bar{u}}_0\|_0 + \|\underline{v}_0 - \underline{\bar{v}}_0\|_0 < \delta,$$

tem-se

$$\|\underline{u} - \underline{\bar{u}}\|_0 + \|\underline{S} - \underline{\bar{S}}\|_0 < \epsilon, \text{ para todo } t > 0.$$

O processo $(\underline{\bar{u}}, \underline{\bar{S}})$, estável segundo Liapunov, é assintoticamente estável se,

c) Existe $\sigma < \gamma$ suficientemente pequeno, tal que,

$$\|\underline{u}_0 - \underline{\bar{u}}_0\|_0 + \|\underline{v}_0 - \underline{\bar{v}}_0\|_0 < \sigma,$$

implica em

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{ \|\underline{u} - \underline{\bar{u}}\|_0 + \|\underline{S} - \underline{\bar{S}}\|_0 \} = 0.$$

Como o tensor de tensões \underline{S} está relacionado com o tensor de deformações \underline{E} , através da equação constitutiva (2.88), e \underline{E} está relacionado com o campo de deslocamentos \underline{u} através das equações cinemáticas, estabilidade em relação ao campo de deslocamentos implica em estabilidade em relação ao campo de tensões, sempre que

$$\int_{\mathbb{B}_0} [S(\bar{E}) - S(E)] \cdot (\bar{E} - E) dV_0 > 0, \forall E \neq \bar{E}.$$

Estabilidade infinitesimal

Através de uma mudança de variáveis, semelhante a (2.90), obtem-se a forma variacional correspondente a expressão (2.87) do PTV, que permite o estudo da estabilidade do processo dinâmico (\bar{u}, \bar{S}) .

Define-se, então, a seguinte mudança de variáveis,

$$\begin{aligned} u(\underline{x}, t) &= \bar{u}(\underline{x}, t) + \Delta u(\underline{x}, t), \\ S(\underline{x}, t) &= \bar{S}(\underline{x}, t) + \Delta S(\underline{x}, t), \\ E(\underline{x}, t) &= \bar{E}(\underline{x}, t) + \varepsilon(\underline{x}, t) + \eta(\underline{x}, t), \\ \ddot{u}(\underline{x}, t) &= \ddot{\bar{u}}(\underline{x}, t) + \Delta \ddot{u}(\underline{x}, t), \end{aligned} \quad (2.98a-d)$$

que levadas à expressão (2.87) do princípio dos trabalhos virtuais resulta,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{B}_0} \rho_0 \Delta \ddot{u} \cdot \hat{u} dV_0 + \int_{\mathbb{B}_0} \Delta S \cdot (\hat{\varepsilon} + \hat{\eta}) dV_0 + \int_{\mathbb{B}_0} \bar{S} \cdot \hat{\eta} dV_0 = \\ &= \int_{\partial \mathbb{B}_0} \underline{t}_0 \cdot \hat{u} ds_0 + \int_{\mathbb{B}_0} \rho_0 \underline{b} \cdot \hat{u} dV_0 - \int_{\mathbb{B}_0} \rho_0 \ddot{\bar{u}} \cdot \hat{u} dV_0 - \int_{\mathbb{B}_0} \bar{S} \cdot \hat{\varepsilon} dV_0, \end{aligned} \quad (2.99)$$

como o segundo membro de (2.99) é idêntico a zero, por ser a expressão do equilíbrio correspondente ao processo (\bar{u}, \bar{S}) , tem-se:

$$\int_{\mathbb{B}_0} \rho_0 \Delta \ddot{u} \cdot \hat{u} dV_0 + \int_{\mathbb{B}_0} \Delta S \cdot (\hat{\varepsilon} + \hat{\eta}) dV_0 + \int_{\mathbb{B}_0} \hat{S} \cdot \hat{\eta} dV_0 = 0 \quad (2.100)$$

que é a forma variacional não linear. A análise da estabilidade de (\bar{u}, \bar{S}) , pode então ser feita pelo estudo do comportamento da solução $(\Delta u, \Delta S)$ de (2.100).

A forma linear associada a (2.100),

$$\int_{\mathbb{B}_0} \rho_0 \Delta \tilde{u} \cdot \hat{\tilde{u}} \, dV_0 + \int_{\mathbb{B}_0} L(t) [\tilde{\varepsilon}] \cdot \hat{\tilde{\varepsilon}} \, dV_0 + \int_{\mathbb{B}_0} \tilde{S} \cdot \hat{\tilde{\eta}} \, dV_0 = 0, \quad (2.101)$$

permite o estudo da estabilidade infinitesimal de (\tilde{u}, \tilde{S}) . Sob certas condições a estabilidade infinitesimal, implica em estabilidade, conforme será visto no capítulo V.

Em geral, a equação (2.101) possui coeficientes variáveis com o tempo. Apenas no caso de estabilidade de um ponto de equilíbrio, em que \tilde{u} e \tilde{S} são independentes do tempo, é que (2.101) tem coeficientes constantes. Uma situação particularmente interessante ocorre quando \tilde{u} e \tilde{S} , são funções periódicas. Neste caso (2.101) tem coeficientes periódicos, e surgem problemas de ressonância paramétrica e/ou combinatória, que serão estudados no capítulo V deste trabalho.

III. TEORIA DAS CASCAS

3.1. Introdução

O problema geral da dinâmica de corpos elásticos, proposto no capítulo anterior, está apresentado numa forma genérica, independente do sistema de coordenadas escolhido para descrever a geometria do corpo, e representar as grandezas físicas que intervêm, neste problema. Entretanto, no estudo de uma situação concreta, é imprescindível a fixação de um sistema de coordenadas apropriado em relação ao qual será descrito o movimento, e medidas as componentes das forças, das deformações e das tensões atuantes sobre o corpo.

Em bases cartesianas ortogonais ($\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$), vetores e tensores têm a seguinte representação:

$$\underline{u} = u_i \underline{e}_i,$$

$$\underline{b} = b_i \underline{e}_i,$$

$$\underline{t} = t_i \underline{e}_i,$$

$$\underline{E} = E_{ij}(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j),$$

$$\underline{T} = T_{ij}(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j), \quad (3.1a-e)$$

onde ($\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$); $i, j=1, 2, 3$; é a base cartesiana dos tensores. (Neste capítulo, índices repetidos indicam somação. Índices romanos assumem os valores 1, 2, 3, e índices gregos 1, 2).

As componentes E_{ij} do tensor de deformação de Green-Lagrange, e as componentes das equações do movimento, em bases Cartesianas, são respectivamente:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}), \quad (3.2)$$

e

$$T_{ij,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i, \quad T_{ij} = T_{ji}; \quad (3.3)$$

$$\text{com } (, j) = \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Dependendo da geometria do corpo, sistemas de coordenadas curvilíneas podem ser mais convenientes do que sistemas cartesianos. Entretanto a determinação das componentes dos tensores de deformação, e das equações do movimento em coordenadas curvilíneas não é tão simples quanto no caso de coordenadas cartesianas, pois no cálculo das componentes das derivadas de vetores ou tensores, representados em bases variáveis (co-variantes ou contra-variantes), derivam-se não apenas as componentes mas também os vetores da base (derivadas co-variantes ou contra-variantes).

Para cascas delgadas, que são corpos cujas partículas se distribuem na vizinhança de uma superfície S , com uma espessura h , pequena em relação às demais dimensões, o sistema de coordenadas mais adequado é o sistema intrínseco de S , tanto do ponto de vista geométrico quanto estrutural, pois a superfície média define não apenas a forma mas também o comportamento da casca como uma estrutura, isto é, a sua capacidade de resistir a determinadas solicitações mecânicas.

Neste capítulo são obtidas as componentes do tensor de deformação de uma casca, referidas ao sistema intrínseco da superfície média, entendendo a casca como um corpo tridimensional. Através das hipóteses de Kirchhoff-Love, reduz-se a dimensão referente à espessura e obtem-se a teoria não linear de cascas delgadas proposta em [17]. No final do capítulo estes resultados são aplicados às cascas axissimétricas em geral e às cascas cônicas em particular visando as aplicações dos capítulos seguintes.

3.2. Resultados da teoria das superfícies

A equação de uma superfície, em coordenadas cartesianas, é:

$$\tilde{X}(\alpha_1, \alpha_2) = X_i(\alpha_1, \alpha_2)\tilde{e}_i, \quad (3.4)$$

onde α_1 e α_2 são parâmetros reais, e definem um sistema de coordenadas curvilíneas sobre S , através das curvas: α_1 constante e α_2 constante, figura 2.1.

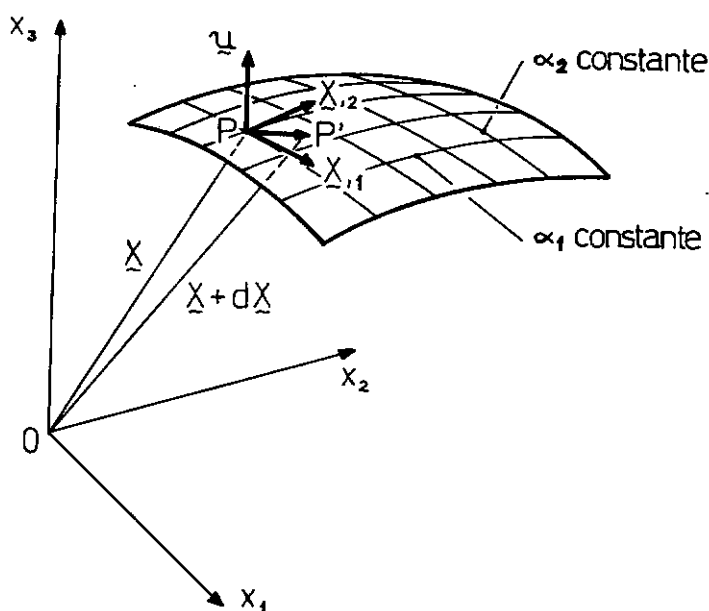


Fig. 3.1 - Coordenadas intrínsecas de uma superfície genérica

Admite-se que S seja suficientemente regular, de sorte que as derivadas

$$\tilde{X}_{,1} = \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \alpha_1} \text{ e } \tilde{X}_{,2} = \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \alpha_2} \quad (3.5)$$

existem e são linearmente independentes.

Serão usados os seguintes resultados da teoria das superfícies, [22-27]

i) *Vetores unitários do triedro intrínseco*

$$\tilde{t}_1 = \tilde{X}_{,1} / |\tilde{X}_{,1}| ,$$

$$\tilde{t}_2 = \tilde{X}_{,2} / |\tilde{X}_{,2}| ,$$

$$\tilde{n} = \tilde{t}_1 \wedge \tilde{t}_2 / |\tilde{t}_1 \wedge \tilde{t}_2| ; \quad (3.6a-c)$$

ii) Primeira forma fundamental

$$ds^2 = d\tilde{X} \cdot d\tilde{X} = g_{\gamma\beta} d\alpha_\gamma d\alpha_\beta ; \quad (3.7)$$

onde

$$g_{\gamma\beta} = \tilde{X}_{,\gamma} \cdot \tilde{X}_{,\beta} , \quad (3.8)$$

são chamados primeiras grandezas fundamentais da superfície , ou parâmetros de primeira espécie;

iii) Curvatura normal

$$K_n = \frac{L_{\gamma\beta} d\alpha_\gamma d\alpha_\beta}{g_{\gamma\beta} d\alpha_\gamma d\alpha_\beta} , \quad (3.9)$$

onde

$$L_{\gamma\beta} = \tilde{X}_{,\gamma} \cdot \tilde{n}_{,\beta} = - \tilde{X}_{,\gamma\beta} \cdot \tilde{n} , \quad (3.10)$$

são chamadas segundas grandezas fundamentais da superfície, ou parâmetros de segunda espécie.

A teoria de cascas apresentada neste trabalho, será formulada em coordenadas intrínsecas ortogonais, coincidentes com as direções principais de curvatura, [26]. Neste caso,

$$g_{\gamma\beta} = \tilde{X}_{,\gamma} \cdot \tilde{X}_{,\beta} = 0, \quad \gamma \neq \beta$$

$$L_{\gamma\beta} = - \tilde{X}_{\gamma\beta} \cdot \tilde{n} = 0, \quad \gamma \neq \beta \quad (3.11a,b)$$

e, em consequência tem-se:

i) Vetores unitários do triedro intrínseco

$$\tilde{t}_1 = \tilde{X}_{,1}/A_1 ; \quad A_1 = |\tilde{X}_{,1}| ,$$

$$\tilde{t}_2 = \tilde{X}_{,2}/A_2 ; \quad A_2 = |\tilde{X}_{,2}| ,$$

$$\tilde{n} = \tilde{t}_1 \wedge \tilde{t}_2 , \quad (3.12a-c)$$

ii) Primeira forma fundamental

$$(ds)^2 = A_1^2(d\alpha_1)^2 + A_2^2(d\alpha_2)^2, \quad (3.13)$$

iii) Curvatura normal

$$k_n = \frac{(A_1^2/R_1)(d\alpha_1)^2 + (A_2^2/R_2)(d\alpha_2)^2}{A_1^2(d\alpha_1)^2 + A_2^2(d\alpha_2)^2}, \quad (3.14)$$

sendo $k_1 = 1/R_1$ e $k_2 = 1/R_2$, curvaturas principais, e R_1 e R_2 raios de curvatura principais da superfície.

iv) Derivadas dos vetores unitários

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{t}_1}{\partial \alpha_1} &= - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \tilde{t}_2 - \frac{A_1}{R_1} \tilde{n}; \\ \frac{\partial \tilde{t}_1}{\partial \alpha_2} &= - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \tilde{t}_2; \\ \frac{\partial \tilde{t}_2}{\partial \alpha_1} &= - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \tilde{t}_1; \\ \frac{\partial \tilde{t}_2}{\partial \alpha_2} &= - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \tilde{t}_1 - \frac{A_2}{R_2} \tilde{n}; \\ \frac{\partial \tilde{n}}{\partial \alpha_1} &= \frac{A_1}{R_1} \tilde{t}_1; \\ \frac{\partial \tilde{n}}{\partial \alpha_2} &= \frac{A_2}{R_2} \tilde{t}_2; \end{aligned} \quad (3.15a-f)$$

v) Condições de Gauss-Codazzi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{A_1}{R_1} \right), \\ \frac{1}{R_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_2}{R_2} \right), \end{aligned}$$

são chamados condições de Codazzi, e são obtidos de $\tilde{n}_{,12} = \tilde{n}_{,21}$;

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left\{ \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right\} + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left\{ \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right\} = - \frac{A_1 A_2}{R_1 R_2} \quad (3.17)$$

é conhecida como condição de Gauss, e é obtida de $\underline{t}_{1,12} = \underline{t}_{1,21}$.

3.3. Descrição do movimento de uma Casca como um corpo

Seja P^* um ponto qualquer da Casca, na configuração de referência C_0 , e P a projeção de P^* sobre S_0 . P_t^* é a imagem de P^* em C_t e P_t é a imagem de P em S_t , Fig. 3.2.

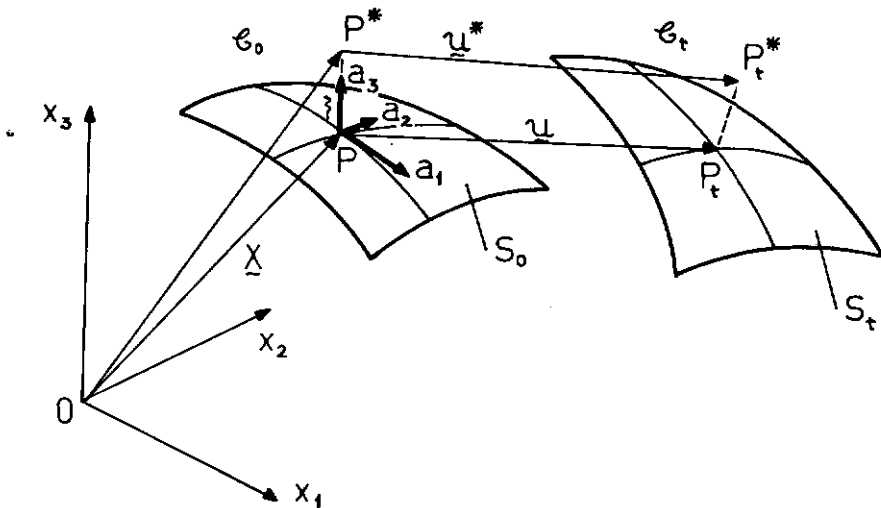


Fig. 3.2 - Descrição do movimento de uma casca em coordenadas intrínsecas da superfície média

Chamando de $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$ a base anteriormente definida como $(\underline{t}_1, \underline{t}_2, \underline{n})$ pode-se escrever

$$\begin{aligned} P_t^* - P^* &= \underline{u}^*(\alpha_1, \alpha_2, \xi) = \sum_{i=1}^3 \underline{u}_i^*(\alpha_1, \alpha_2, \xi) \underline{a}_i, \\ P^* - 0 &= \underline{X}^*(\alpha_1, \alpha_2, \xi) = \underline{X}(\alpha_1, \alpha_2) + \xi \underline{a}_3. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Definindo $\nabla \underline{u}^*|_{\underline{X}^*}$, como sendo o gradiente de \underline{u}^* em rela

ção à base $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$, e $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \xi)$ tem-se,

$$\nabla_{\underline{u}^*} \Big|_{\underline{X}^*} = \nabla_{\underline{u}^*} \Big|_{\underline{\alpha}} \nabla_{\underline{\alpha}} \Big|_{\underline{X}^*}. \quad (3.19)$$

- Cálculo de $\nabla_{\underline{u}^*} \Big|_{\underline{\alpha}}$

Como $\underline{u}^* = \sum_{i=1}^3 u_i^* \underline{a}_i$, então

$$\nabla_{\underline{u}^*} \Big|_{\underline{\alpha}} = \nabla \left(\sum_{i=1}^3 u_i^* \underline{a}_i \right) = \sum_{i=1}^3 \nabla (u_i^* \underline{a}_i) = \sum_{i=1}^3 (\underline{a}_i \otimes \nabla u_i^*) + \sum_{i=1}^3 u_i^* \nabla \underline{a}_i, \quad (3.20)$$

e considerando as expressões (2.15), das derivadas dos vetores unitários, chega-se a matriz de $\nabla_{\underline{u}^*} \Big|_{\underline{\alpha}}$,

$$\left[\nabla_{\underline{u}^*} \Big|_{\underline{\alpha}} \right] = \begin{bmatrix} A_1 L_{11}(\underline{u}^*) & A_2 L_{12}(\underline{u}^*) & \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} \\ A_1 L_{21}(\underline{u}^*) & A_2 L_{22}(\underline{u}^*) & \frac{\partial u_2^*}{\partial \xi} \\ A_1 L_{31}(\underline{u}^*) & A_2 L_{32}(\underline{u}^*) & \frac{\partial u_3^*}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

sendo,

$$L_{11}(\underline{u}^*) = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1^*}{\partial \alpha_1} + \frac{u_2^*}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \frac{u_3^*}{R_1},$$

$$L_{12}(\underline{u}^*) = \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_1^*}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_2^*,$$

$$L_{21}(\underline{u}^*) = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2^*}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_1^*,$$

$$L_{22}(\underline{u}^*) = \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2^*}{\partial \alpha_2} + \frac{u_1^*}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{u_3^*}{R_2},$$

$$L_{31}(\underline{u}^*) = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_3^*}{\partial \alpha_1} - \frac{u_1^*}{R_1},$$

$$L_{32}(\underline{u}^*) = \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_3^*}{\partial \alpha_2} - \frac{u_2^*}{R_2}. \quad (3.22a-f)$$

- Cálculo de $\nabla \alpha|_{\tilde{X}^*}$

Como se conhece \tilde{X}^* como função de α , e não o contrário, α como função de \tilde{X}^* , as componentes de $\nabla \alpha|_{\tilde{X}^*}$ são calculadas através da equação

$$\nabla \alpha|_{\tilde{X}^*} = (\nabla \tilde{X}^*|_{\alpha})^{-1}, \quad (3.23)$$

Uma vez que \tilde{X}^* é não singular, obtendo-se assim

$$[\nabla \alpha|_{\tilde{X}^*}] = \begin{bmatrix} r_1/A_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2/A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

onde, $r_1 = 1/(1 + \frac{\xi}{R_1})$ e $r_2 = 1/(1 + \frac{\xi}{R_2})$.

De (3.19), (3.21) e (3.24), obtém-se finalmente a matriz de $\nabla \underline{u}^*|_{\tilde{X}^*}$ dada por,

$$[\nabla \underline{u}^*] = \begin{bmatrix} r_1 L_{11}(\underline{u}^*) & r_2 L_{12}(\underline{u}^*) & \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} \\ r_1 L_{21}(\underline{u}^*) & r_2 L_{22}(\underline{u}^*) & \frac{\partial u_2^*}{\partial \xi} \\ r_1 L_{31}(\underline{u}^*) & r_2 L_{32}(\underline{u}^*) & \frac{\partial u_3^*}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Conhecidas as componentes do gradiente dos deslocamentos, pode-se, facilmente, determinar as componentes dos tensores de deformação.

No caso do tensor de deformação de Green-Lagrange, a matriz $[\tilde{E}]$ é obtida, substituindo (3.25) na expressão abaixo

$$[\tilde{E}] = \frac{1}{2}([\nabla \underline{u}^*] + [\nabla \underline{u}^*]^T + [\nabla \underline{u}^*]^T [\nabla \underline{u}^*]). \quad (3.26)$$

Até aqui estudou-se o movimento de um corpo, sem a introdução de qualquer hipótese própria à teoria das cascas. Os resultados, assim obtidos, são aplicáveis a sólidos, onde a espessura é da mesma ordem das demais dimensões. Para o estudo de cascas delgadas, algumas hipóteses ou restrições sobre o movimento, são cabíveis, [17,25-31].

3.4. Hipóteses de Kirchhoff-Love

1) As normais à superfície média não deformada, permanecem retas após a deformação.

Esta hipótese impõe a seguinte restrição ao campo de deslocamento:

$$\underline{\underline{u}}^* = \underline{\underline{u}} + \xi \underline{\underline{\beta}} \quad (3.27)$$

sendo,

$$\underline{\underline{\beta}} = \left. \frac{\partial \underline{\underline{u}}^*}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} \quad (3.28)$$

conseqüentemente,

$$\nabla \underline{\underline{u}}^* \Big|_{\underline{\underline{X}}^*} = \underline{\underline{H}}_0 + \xi \underline{\underline{H}}_1, \quad (3.29)$$

sendo as matrizes de $\underline{\underline{H}}_0$ e $\underline{\underline{H}}_1$, dadas por:

$$[\underline{\underline{H}}_0] = \begin{bmatrix} r_1 L_{11}(\underline{\underline{u}}) & r_2 L_{12}(\underline{\underline{u}}) & \beta_1 \\ r_1 L_{21}(\underline{\underline{u}}) & r_2 L_{22}(\underline{\underline{u}}) & \beta_2 \\ r_1 L_{31}(\underline{\underline{u}}) & r_2 L_{32}(\underline{\underline{u}}) & \beta_3 \end{bmatrix}; \quad (3.30)$$

$$[\underline{\underline{H}}_1] = \begin{bmatrix} r_1 L_{11}(\underline{\underline{\beta}}) & r_2 L_{12}(\underline{\underline{\beta}}) & 0 \\ r_1 L_{21}(\underline{\underline{\beta}}) & r_2 L_{22}(\underline{\underline{\beta}}) & 0 \\ r_1 L_{31}(\underline{\underline{\beta}}) & r_2 L_{32}(\underline{\underline{\beta}}) & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

Neste caso o tensor de deformação de Green-Lagrange é,

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}_0 + \xi \underline{\underline{E}}_1 + \xi^2 \underline{\underline{E}}_2 \quad (3.32)$$

com,

$$\begin{aligned} \underline{\underline{E}}_0 &= \frac{1}{2}(\underline{\underline{H}}_0 + \underline{\underline{H}}_0^T + \underline{\underline{H}}_0^T \underline{\underline{H}}_0) \\ \underline{\underline{E}}_1 &= \frac{1}{2}(\underline{\underline{H}}_1 + \underline{\underline{H}}_1^T + \underline{\underline{H}}_0^T \underline{\underline{H}}_1 + \underline{\underline{H}}_1^T \underline{\underline{H}}_0) \\ \underline{\underline{E}}_2 &= \frac{1}{2} \underline{\underline{H}}_1^T \underline{\underline{H}}_1 \end{aligned} \quad (3.33)$$

Uma teoria de cascas baseada apenas nesta hipótese se-

ria adequada a cascas espessas. Nesta teoria os deslocamentos de um ponto qualquer P^* , da casca, são definidos em termos de dois campos vetoriais independentes \underline{u} e $\underline{\beta}$, definidos na superfície média.

2) Casca delgada

Se a casca é suficientemente delgada, então $\frac{h}{R_1} \ll 1$, e conseqüentemente pode-se fazer as seguintes simplificações:

$$r_1 = 1/(1 + \frac{\xi}{R_1}) \approx 1,$$

$$r_2 = 1/(1 + \frac{\xi}{R_2}) \approx 1,$$

$$E_{33} = \beta_3 + \frac{1}{2}(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) = 0 \Rightarrow \beta_3 = O(\beta_1^2, \beta_2^2). \quad (3.34a,b)$$

3) Pequenos deslocamentos no interior da casca.

Esta hipótese equivale a admitir não linearidade nas deformações da superfície média, (relativas ao campo \underline{u}), e linearidade nas variações das curvaturas, (relativas ao campo $\underline{\beta}$).

Admite-se, portanto $|\underline{\beta}| = O(\varepsilon)$, e considerando que $\beta_3 = O(\beta_1^2, \beta_2^2)$ conclue-se que $\beta_3 = O(\varepsilon^2)$, ou seja, $\beta_3 \approx 0$, resultando a seguinte restrição sobre o campo de deslocamentos,

$$u_1^* = u_1 + \beta_1,$$

$$u_2^* = u_2 + \beta_2,$$

$$u_3^* = u_3. \quad (3.35a-c)$$

4) As normais à superfície média não deformada permanecem normais, após a deformação.

Equivale a:

$$E_{13} = \frac{1}{2}(L_{31}(\underline{u}) + \beta_1 + \beta_1 L_{11}(\underline{u}) + \beta_2 L_{21}(\underline{u})) = 0,$$

$$E_{23} = \frac{1}{2}(L_{32}(\underline{u}) + \beta_2 + L_{12}(\underline{u})\beta_1 + L_{22}(\underline{u})\beta_2) = 0, \quad (3.36a,b)$$

e, em conseqüência das hipóteses anteriores,

$$\begin{aligned}\beta_1 &= -L_{31}(\underline{u}), \\ \beta_2 &= -L_{32}(\underline{u}).\end{aligned}\quad (3.37a,b)$$

De acordo com estas hipóteses, as únicas componentes de deformação não nulas são: $E_{\alpha\beta}$, $\beta=1,2$, $\alpha=1,2$, isto é,

$$\underline{E} = \underline{E}^0 + \xi \underline{E}^1 \quad (3.38)$$

com $E_{\alpha\beta}^0$ e $E_{\alpha\beta}^1$ dados por:

$$\begin{aligned}E_{\alpha\beta}^0 &= \frac{1}{2}(L_{\alpha\beta}(\underline{u}) + L_{\beta\alpha}(\underline{u}) + L_{j\alpha}(\underline{u}) L_{j\beta}(\underline{u})), \\ E_{\alpha\beta}^1 &= \frac{1}{2}(K_{\alpha\beta}(\underline{\beta}) + K_{\beta\alpha}(\underline{\beta})),\end{aligned}\quad (3.39a,b)$$

sendo $L_{j\beta}(\underline{u})$ definido em (3.22a-f), e $K_{\alpha\beta}(\underline{\beta})$ dado pelas expressões seguintes:

$$\begin{aligned}K_{11}(\underline{\beta}) &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (L_{31}(\underline{u})) - \frac{L_{32}(\underline{u})}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}; \\ K_{12}(\underline{\beta}) &= -\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (L_{31}(\underline{u})) + \frac{L_{32}(\underline{u})}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}; \\ K_{21}(\underline{\beta}) &= -\frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (L_{32}(\underline{u})) + \frac{L_{31}(\underline{u})}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}; \\ K_{22}(\underline{\beta}) &= -\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (L_{32}(\underline{u})) - \frac{L_{31}(\underline{u})}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}.\end{aligned}\quad (3.40a-d)$$

Neste nível de simplificação, conseguiu-se reduzir o problema originalmente tridimensional, a um problema bidimensional, onde os deslocamentos de qualquer ponto da casca podem ser expressos em termos do campo de deslocamentos \underline{u} da superfície média. As expressões (3.39a,b) das componentes de deformação e de variação da curvatura da superfície média caracterizam a teoria não linear de cascas delgadas proposta por Novozhilov [17].

3.5. Equações de Equilíbrio

As equações de equilíbrio serão obtidas a partir do princípio dos trabalhos virtuais, referido à configuração inicial C_0 ,

$$\int_{C_0} \rho_0 \ddot{u}^* \cdot \hat{u}^* dV_0 + \int_{C_0} \tilde{T}^* \cdot \nabla \hat{u}^* dV_0 = \int_{C_0} \rho_0 \tilde{b} \cdot \hat{u}^* dV_0 + \int_{\partial C_0} \tilde{q} \cdot \hat{u}^* dS_0 \quad (3.41)$$

Nesta expressão, \tilde{T}^* representa o primeiro tensor de tensões de Piola-Kirchhoff, e \tilde{q} força por unidade de área na configuração C_0 .

Considera-se inicialmente o problema de casca espessa e posteriormente o de casca delgada.

a) Casca espessa

Neste caso $u^* = \underline{u} + \xi \underline{\beta}$, sendo \underline{u} e $\underline{\beta}$ independentes, conseqüentemente a expressão do P.T.V. pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} \int_{\xi} \rho (\ddot{\underline{u}} + \xi \ddot{\underline{\beta}}) \cdot (\hat{\underline{u}} + \xi \hat{\underline{\beta}}) A_1 \left(1 + \frac{\xi}{R_1}\right) A_2 \left(1 + \frac{\xi}{R_2}\right) d\xi d\alpha_1 d\alpha_2 + \\ & \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} \int_{\xi} \tilde{T}^* \cdot (\underline{H}^0 + \xi \underline{H}^1) A_1 \left(1 + \frac{\xi}{R_1}\right) A_2 \left(1 + \frac{\xi}{R_2}\right) d\xi d\alpha_1 d\alpha_2 = \\ & = \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} \int_{\xi} \rho \tilde{b} \cdot (\hat{\underline{u}} + \xi \hat{\underline{\beta}}) A_1 \left(1 + \frac{\xi}{R_1}\right) A_2 \left(1 + \frac{\xi}{R_2}\right) d\xi d\alpha_1 d\alpha_2 + \\ & \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} \left[\tilde{q}^+ \cdot \left(\hat{\underline{u}} + \frac{h}{2} \hat{\underline{\beta}}\right) \left(1 + \frac{h}{2R_1}\right) \left(1 + \frac{h}{2R_2}\right) + \tilde{q}^- \cdot \left(\hat{\underline{u}} - \frac{h}{2} \hat{\underline{\beta}}\right) \left(1 - \frac{h}{2R_1}\right) \left(1 - \frac{h}{2R_2}\right) \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\ & \int_{\alpha_1} \int_{\xi} \tilde{t}_1 \cdot (\underline{u} + \xi \underline{\beta}) A_2 \left(1 + \frac{\xi}{R_2}\right) d\xi d\alpha_2 + \int_{\alpha_1} \int_{\xi} \tilde{t}_2 \cdot (\hat{\underline{u}} + \xi \hat{\underline{\beta}}) A_1 \left(1 + \frac{\xi}{R_1}\right) d\xi d\alpha_1, \end{aligned} \quad (3.42)$$

onde \tilde{q}^+ e \tilde{q}^- representam trações nas superfícies externa e interna, e \tilde{t}_1 e \tilde{t}_2 são trações nas bordas α_1 constante e α_2 constante respectivamente.

Introduzindo as definições dos esforços e momentos uni-
tários,

$$\begin{aligned} N_{i\beta}^* &= \int_{\xi} T_{i\beta}^* \left(1 + \frac{\xi}{R_{\alpha}}\right) d\xi, \quad \alpha \neq \beta \\ N_{i3}^* &= \int_{\xi} T_{i3}^* \left(1 + \frac{\xi}{R_1}\right) \left(1 + \frac{\xi}{R_2}\right) d\xi; \\ M_{i\beta}^* &= \int_{\xi} T_{i\beta}^* \xi \left(1 + \frac{\xi}{R_{\alpha}}\right) d\xi, \quad \alpha \neq \beta; \end{aligned} \quad (3.43a-c)$$

resultantes das tensões $T_{i\alpha}^*$ na borda α_{β} constante, e conside-
rando as definições de \tilde{H}^0 e \tilde{H}^1 dados em (3.30) e (3.31), obtem-
se, após integração de (3.42) ao longo da espessura,

$$\begin{aligned} &\int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} \rho h \left[a_1 \ddot{u}_i \hat{u}_i + a_2 \ddot{\beta}_i \hat{u}_i + a_2 \ddot{u}_i \hat{\beta}_i + a_3 \ddot{\beta}_i \hat{\beta}_i \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\ &\int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} \left[(N_{i\beta}^* L_{i\beta}(\hat{u}) + N_{i\beta}^* \hat{\beta}_i + M_{i\beta}^* L_{i\beta}(\hat{\beta})) \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = \\ &= \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} \left[(\rho h a_1 b_i \hat{u}_i + p_i \hat{u}_i + \rho h a_2 b_i \hat{\beta}_i + m_i \hat{\beta}_i) \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\ &\int_{\alpha_2} (\bar{N}_{i1}^* \hat{u}_i + \bar{M}_{i1}^* \hat{\beta}_i) A_2 d\alpha_2 + \int_{\alpha_1} (\bar{N}_{i2}^* \hat{u}_i + \bar{M}_{i2}^* \hat{\beta}_i) A_1 d\alpha_1, \end{aligned} \quad (3.44)$$

onde foram introduzidas as seguintes variáveis auxiliares:

$$a_1 = 1 + \frac{h}{12R_1R_2}; \quad a_2 = \frac{h^2}{12} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right); \quad a_3 = \frac{h^2}{12} \left(1 + \frac{3h^2}{20R_1R_2} \right);$$

$$p_i = q_i^+ \left(1 + \frac{h}{2R_1} \right) \left(1 + \frac{h}{2R_2} \right) + q_i^- \left(1 - \frac{h}{2R_1} \right) \left(1 - \frac{h}{2R_2} \right);$$

$$m_i = \frac{h}{2} \left[q_i^+ \left(1 + \frac{h}{2R} \right) \left(1 + \frac{h}{2R} \right) - q_i^- \left(1 - \frac{h}{2R} \right) \left(1 - \frac{h}{2R} \right) \right]. \quad (3.45a-e)$$

Substituindo em (3.44), as expressões de $L_{ij}(\)$ dados
por (3.22), após integrações por partes, obtem-se:

- Equações de equilíbrio:

$$1) \rho_0 h A_1 A_2 (a_1 \ddot{u}_1 + a_2 \ddot{\beta}_1) = \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 N_{11}^*) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 N_{12}^*) + N_{21}^* \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - \\ - N_{22}^* \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{N_{31}^* A_1 A_2}{R_1} + A_1 A_2 (\rho_0 h a_1 b_1 + p_1),$$

$$2) \rho_0 h A_1 A_2 (a_1 \ddot{u}_2 + a_2 \ddot{\beta}_2) = \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 N_{21}^*) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 N_{22}^*) + N_{12}^* \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - \\ - N_{11}^* \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \frac{N_{32}^* A_1 A_2}{R_2} + A_1 A_2 (\rho_0 h a_1 b_2 + p_2),$$

$$3) \rho_0 h A_1 A_2 (a_1 \ddot{u}_3 + a_2 \ddot{\beta}_3) = \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 N_{31}^*) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 N_{32}^*) - \\ - A_1 A_2 \left(\frac{N_{11}^*}{R_1} + \frac{N_{22}^*}{R_2} \right) + A_1 A_2 (\rho_0 h a_1 b_3 + p_3),$$

$$4) \rho_0 h A_1 A_2 (a_2 \ddot{u}_1 + a_3 \ddot{\beta}_1) = \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 M_{11}^*) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 M_{12}^*) + M_{21}^* \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - \\ - M_{22}^* \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - N_{13}^* A_1 A_2 + \frac{M_{31}^* A_1 A_2}{R_1} + A_1 A_2 (\rho_0 h a_2 b_1 + m_1)$$

$$5) \rho_0 h A_1 A_2 (a_2 \ddot{u}_2 + a_3 \ddot{\beta}_2) = \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 M_{21}^*) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 M_{22}^*) + M_{12}^* \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - \\ - M_{11}^* \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - N_{23}^* A_1 A_2 + \frac{M_{32}^* A_1 A_2}{R_2} + A_1 A_2 (\rho_0 h b_1 + m_1)$$

$$6) \rho_0 h A_1 A_2 (a_2 \ddot{u}_3 + a_3 \ddot{\beta}_3) = \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 M_{31}^*) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 M_{32}^*) - \\ - \left(\frac{M_{11}^*}{R_1} + \frac{M_{22}^*}{R_2} \right) - A_1 A_2 N_{23}^* + A_1 A_2 (\rho_0 h a_2 b_3 + m_3)$$

(3.46a-f)

- Condições de contorno

1) no bordo α_2 constante,

$$N_{11}^* = \bar{N}_{11}^* \text{ ou } u_1 = \bar{u}_1,$$

$$M_{11}^* = \bar{M}_{11}^* \text{ ou } \beta_1 = \bar{\beta}_1 \quad (3.47a,b)$$

2) no bordo α_2 constante,

$$N_{12}^* = \bar{N}_{12}^* \quad \text{ou} \quad u_i = \bar{u}_i ,$$

$$M_{12}^* = \bar{M}_{12}^* \quad \text{ou} \quad \beta_i = \bar{\beta}_i . \quad (3.48a,b)$$

b) Casca delgada

Considerando que $\frac{h}{R_i} \ll 1$, e que $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, 0)$, resulta: $a_1 = 1$; $a_2 = a_3 = m_i = 0$; $p_i = q_i$ e os esforços e momentos resultantes são agora definidos como,

$$\begin{aligned} N_{ij}^* &= \int_{\xi} T_{ij}^* d\xi ; \quad (N_{33}^* = 0); \\ M_{\alpha\beta}^* &= \int_{\xi} T_{\alpha\beta}^* \xi d\xi ; \end{aligned} \quad (3.49a,b)$$

resultando:

- Equações de equilíbrio:

$$\begin{aligned} 1) \rho_0 h A_1 A_2 \ddot{u}_1 &= \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 N_{11}^*) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 N_{12}^*) + N_{21}^* \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - N_{22}^* \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \\ &+ \frac{N_{31}^* A_1 A_2}{R_1} + A_1 A_2 (\rho_0 h b_1 + q_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \rho_0 h A_1 A_2 \ddot{u}_2 &= \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 N_{21}^*) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 N_{22}^*) + N_{12}^* \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - N_{11}^* \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \\ &+ \frac{N_{32}^* A_1 A_2}{R_2} + A_1 A_2 (\rho_0 h b_2 + q_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \rho_0 h A_1 A_2 \ddot{u}_3 &= \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 N_{31}^*) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 N_{32}^*) - A_1 A_2 \left(\frac{N_{11}^*}{R_1} + \frac{N_{22}^*}{R_2} \right) + \\ &+ A_1 A_2 (\rho_0 h b_3 + q_3) \end{aligned}$$

$$4) \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 M_{11}^*) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 M_{12}^*) + M_{21}^* \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - M_{22}^* \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - N_{13}^* A_1 A_2 = 0$$

$$5) \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 M_{21}^*) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 M_{22}^*) + M_{12}^* \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - M_{11}^* \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - N_{23}^* A_1 A_2 = 0 \quad (5.50a-e)$$

6) A sexta equação desaparece, uma vez que $\beta_3 = 0$.

- *Condições de contorno*

As integrais resultantes nos bordos α_1 constante e α_2 constante são respectivamente,

$$\int_{\alpha_2} \left[(N_{11}^* - \bar{N}_{11}^*) \hat{u}_1 + (N_{21}^* - \bar{N}_{21}^*) \hat{u}_2 + (N_{31}^* - \bar{N}_{31}^*) \hat{u}_3 \right] A_2 d\alpha_2 + \int_{\alpha_2} \left[(M_{11}^* - \bar{M}_{11}^*) \hat{\beta}_1 + (M_{21}^* - \bar{M}_{21}^*) \hat{\beta}_2 \right] A_2 d\alpha_2 = 0, \quad (3.51)$$

e

$$\int_{\alpha_1} \left[(N_{22}^* - \bar{N}_{22}^*) \hat{u}_2 + (N_{12}^* - \bar{N}_{12}^*) \hat{u}_1 + (N_{32}^* - \bar{N}_{32}^*) \hat{u}_3 \right] A_1 d\alpha_1 + \int_{\alpha_1} \left[(M_{22}^* - \bar{M}_{22}^*) \hat{\beta}_2 + (M_{12}^* - \bar{M}_{12}^*) \hat{\beta}_1 \right] A_1 d\alpha_1 = 0, \quad (3.52)$$

entretanto os esforços N_{21}^* , N_{31}^* e M_{21}^* , correspondentes ao bordo α_1 constante, e N_{12}^* , N_{32}^* e M_{12}^* , correspondentes ao bordo α_2 constante, não podem ser prescritos independentemente, uma vez que β_1 e β_2 são funções de u , dados por,

$$\beta_1 = -L_{31} [u] = -\frac{1}{A_1} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} + \frac{u_1}{R_1}$$

$$\beta_2 = -L_{32} [u] = -\frac{1}{A_2} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} + \frac{u_2}{R_2}, \quad (3.53a,b)$$

Deste modo as condições de contorno adequadas são obtidas das seguintes maneiras:

1) na borda α_1 constante - substituindo em (3.51), β_2 pela sua expressão (3.53b), e integrando por partes o termo em $\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2}$, obtem-se então

$$N_{11}^* = \bar{N}_{11}^* \quad \text{ou} \quad u_1 = \bar{u}_1 ;$$

$$V_{21}^* = \bar{V}_{21}^* \quad \text{ou} \quad u_2 = \bar{u}_2, \quad (V_{21}^* = N_{21}^* + \frac{M_{21}^*}{R_2}) ;$$

$$V_{31}^* = \bar{V}_{31}^* \quad \text{ou} \quad u_3 = \bar{u}_3, \quad (V_{31}^* = N_{31}^* + \frac{1}{A_2} \frac{\partial M_{21}^*}{\partial \alpha_2}) ;$$

$$M_{11}^* = \bar{M}_{11}^* \quad \text{ou} \quad \beta_1 = \bar{\beta}_1, \quad (3.54a-e)$$

2) na borda α_2 constante - substituindo em (3.52), β_1 por sua expressão (3.53a), e integrando por partes o termo em $\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1}$, obtem-se finalmente,

$$N_{22}^* = \bar{N}_{22}^* \quad \text{ou} \quad u_2 = \bar{u}_2 ;$$

$$V_{12}^* = \bar{V}_{12}^* \quad \text{ou} \quad u_1 = \bar{u}_1, \quad (V_{12}^* = N_{12}^* + \frac{M_{12}^*}{R_1}) ;$$

$$V_{32}^* = \bar{V}_{32}^* \quad \text{ou} \quad u_3 = \bar{u}_3, \quad (V_{32}^* = N_{32}^* + \frac{1}{A_1} \frac{\partial M_{12}^*}{\partial \alpha_1}) ;$$

$$M_{22}^* = \bar{M}_{22}^* \quad \text{ou} \quad \beta_2 = \bar{\beta}_2. \quad (3.55a-d)$$

3.6. Equação Constitutiva

Admite-se que o material da casca é elástico homogêneo e isotrópico, com equação constitutiva dada por,

$$\underline{\underline{S}} = (\lambda \operatorname{tr} \underline{\underline{E}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{E}} \quad (3.56)$$

isto é, uma relação linear entre o segundo tensor de tensão de Piola-Kirchhoff e o tensor de deformação de Green-Lagrange. λ e μ são as constantes de Lamé.

Observa-se que esta equação está de acordo com o axioma de indiferença material, uma vez que $\underline{\underline{S}}$ e $\underline{\underline{E}}$ se transformam igualmente com mudanças de referencial, ou seja: $\underline{\underline{S}}^* = \underline{\underline{S}}$ e $\underline{\underline{E}}^* = \underline{\underline{E}}$.

Em termos do primeiro tensor de Piola-Kirchhoff, tem-se:

$$\underline{\underline{T}}^* = \underline{\underline{F}} (\lambda \operatorname{tr} \underline{\underline{E}} \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{E}})$$

como

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{I}} + \nabla \underline{\underline{u}}, \text{ resulta,}$$

$$\tilde{T}^* = (\lambda \operatorname{tr} \tilde{E}) \tilde{I} + 2\mu \tilde{E} + \nabla u (\lambda \operatorname{tr} \tilde{E} \tilde{I} + 2\mu \tilde{E}) \quad (3.57)$$

Para se obter relações constitutivas entre os esforços, resultantes, N_{ij}^* e M_{ij}^* , e as deformações, basta substituir nas (2.43), a expressão \tilde{T}_{ij}^* , obtida a partir de (2.57).

No caso de cascas delgadas, deve-se considerar ainda que $S_{33} = 0$, e portanto (2.56) pode ser escrita, em componentes, como:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{E}{1-\nu^2} (E_{11} + \nu E_{22}), \\ S_{22} &= \frac{E}{1-\nu^2} (E_{22} + \nu E_{11}), \\ S_{12} &= S_{21} = \frac{E}{2(1+\nu)} E_{12}, \end{aligned} \quad (3.58a-c)$$

sendo que as demais componentes de deformação são nulas. E é o módulo de Young e ν o coeficiente de Poisson, e estão relacionados com λ e μ , por:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad ; \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad ; \\ \nu &= \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad ; \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad ; \end{aligned} \quad (3.59a-d)$$

Definindo-se,

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta} &= \int_{\xi} S_{\alpha\beta} d\xi, \\ M_{\alpha\beta} &= \int_{\xi} S_{\alpha\beta} \xi d\xi, \end{aligned} \quad (3.60a,b)$$

obtem-se:

$$\begin{aligned} N_{11} &= D_m (E_{11}^0 + \nu E_{22}^0) \\ N_{22} &= D_m (E_{22}^0 + \nu E_{11}^0) \\ N_{12} &= N_{21} = \frac{D_m(1-\nu)}{2} E_{12}^0 \\ M_{11} &= D_f (E_{11}^1 + \nu E_{22}^1) \\ M_{22} &= D_f (E_{22}^1 + \nu E_{11}^1) \end{aligned}$$

$$M_{12} = M_{21} = \frac{D_f(1-\nu)}{2} E_{12}^1, \quad (3.60a-f)$$

sendo $E_{\alpha\beta}^0$ deformação na superfície média, e $E_{\alpha\beta}^1$ a variação da curvatura, apresentados em (2.39). D_m e D_f são dados por:

$$D_m = \frac{Eh}{(1-\nu^2)}; \quad D_f = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3.62a,b)$$

3.7. Cascas de revolução

Quando a superfície média é uma superfície de revolução, geralmente se admite como curvas coordenadas, os meridianos e círculos paralelos. Na figura 3.3, um meridiano está definido pela curva $\theta = \text{constante}$, e um círculo paralelo pela curva $\phi = \text{constante}$.

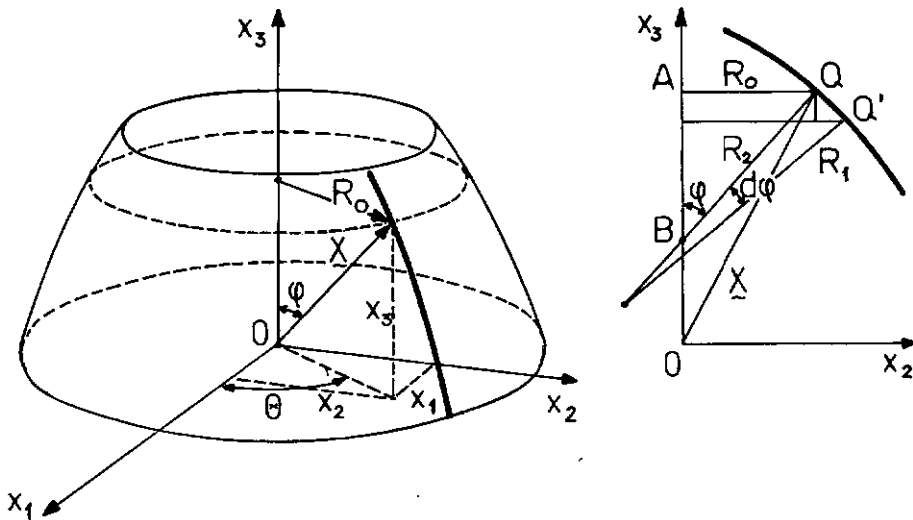


Fig. 3.3 - Elementos da superfície de revolução.

Meridianos, círculos paralelos e raios de curvatura.

Em termos destas coordenadas, a primeira forma funda -

mental da superfície é,

$$(ds)^2 = (R_1 d\phi)^2 + (R_0 d\theta)^2, \quad (3.63)$$

onde R_1 é o raio de curvatura do meridiano e R_0 é o raio de curvatura do círculo paralelo.

Pode-se, então, fazer as seguintes identificações de elementos da superfície de revolução com os elementos da superfície genérica estudada anteriormente,

$$\phi = \alpha_1 ; \quad \theta = \alpha_2$$

$$R_1 = A_1 ; \quad R_0 = A_2. \quad (3.64a-d)$$

Além destas, são comumente usadas as relações

$$R_0 = R_2 \sin \phi,$$

$$\frac{dR_0}{d\phi} = R_1 \cos \phi, \quad (3.64a,b)$$

onde R_1 e R_2 são os raios de curvatura principais.

Como R_0 , R_1 e R_2 são independentes de θ , as expressões (3.22a-f) ficam reduzidas a:

$$B_{11}(\underline{u}) = \frac{1}{R_1} \frac{\partial u_1}{\partial \phi} + \frac{u_3}{R_1} ; \quad B_{12}(\underline{u}) = \frac{1}{R_0} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} - \frac{\cos \phi}{R_0} u_2 ;$$

$$B_{21}(\underline{u}) = \frac{1}{R_1} \frac{\partial u_2}{\partial \phi} ; \quad B_{22}(\underline{u}) = \frac{1}{R_0} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \cos \phi u_1 + \sin \phi u_3 \right) ;$$

$$B_{31}(\underline{u}) = \frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial u_3}{\partial \phi} - u_1 \right) ; \quad B_{32}(\underline{u}) = \frac{1}{R_0} \left(\frac{\partial u_3}{\partial \theta} - u_2 \sin \phi \right) ;$$

onde $L_{i\alpha}(\)$ foi substituído por $B_{i\alpha}(\)$. (3.66a-f)

E, as expressões (3.40a-d), particularizadas para cascas axissimétricas são:

$$C_{11}(\underline{\beta}) = - \frac{1}{R_1} \frac{\partial}{\partial \phi} (B_{31}(\underline{u})) ;$$

$$C_{12}(\underline{\beta}) = - \frac{1}{R_0} \frac{\partial}{\partial \theta} (B_{31}(\underline{u})) + \frac{B_{32}(\underline{u})}{R_1 R_0} \frac{\partial R_0}{\partial \phi} ;$$

$$C_{21}(\beta) = -\frac{1}{R_1} \frac{\partial}{\partial \phi} (B_{32}(\underline{u})) ;$$

$$C_{22}(\beta) = -\frac{1}{R_0} \frac{\partial}{\partial \theta} (B_{32}(\underline{u})) - \frac{B_{31}(\underline{u})}{R_1 R_0} \frac{\partial R_0}{\partial \phi} , \quad (3.67a-d)$$

onde $K_{\alpha\beta}(\)$ foi substituído por $C_{\alpha\beta}(\)$.

Portanto, as expressões das componentes de deformação e das componentes de variação da curvatura da superfície média de uma casca axissimétrica são, respectivamente,

$$E_{\alpha\beta}^0 = A_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} B_{j\alpha} B_{j\beta} ,$$

$$E_{\alpha\beta}^1 = X_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (C_{\alpha\beta} + C_{\beta\alpha}) \quad (3.68a,b)$$

onde,

$$A_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (B_{\alpha\beta} + B_{\beta\alpha}) , \quad (3.69)$$

com $B_{j\beta} = B_{j\beta}(\underline{u})$ e $C_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta}(\beta)$, dados por (3.66a-f) e (3.67a-d).

No caso específico de cascas cônicas, $R_1 = \infty$, admite-se como coordenadas $\alpha_2 = \theta$ e $\alpha_1 = s$, onde s é um comprimento medido sobre o meridiano.

Neste caso, tem-se:

$$B_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial s} ; \quad B_{12} = \frac{1}{R_0} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta} - \text{sen } \alpha u_2 \right) ;$$

$$B_{21} = \frac{\partial u_2}{\partial s} ; \quad B_{22} = \frac{1}{R_0} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \text{sen } \alpha u_1 + \text{cos } \alpha u_3 \right) ;$$

$$B_{31} = \frac{\partial u_3}{\partial s} ; \quad B_{32} = \frac{1}{R_0} \left(\frac{\partial u_3}{\partial \theta} - u_2 \text{cos } \alpha \right) ; \quad (3.70a-f)$$

e,

$$C_{11} = -\frac{\partial^2 u_3}{\partial s^2} ;$$

$$C_{12} = -\frac{1}{R_0^2} \left(R_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial \theta \partial s} - \text{sen } \alpha \frac{\partial u_3}{\partial \theta} + \text{sen } \alpha \text{cos } \alpha u_2 \right) ;$$

$$C_{21} = -\frac{1}{R_0} \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial \theta \partial s} - \text{cos } \alpha \frac{\partial u_2}{\partial s} \right) ;$$

$$C_{22} = -\frac{1}{R_0} \left(\frac{\partial u_3}{\partial \theta^2} - \text{cos } \alpha \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + R_0 \text{sen } \alpha \frac{\partial u_3}{\partial s} \right) . \quad (3.71a-d)$$

Nesta expressão, α é o semi-ângulo da superfície cônica.

IV. VIBRAÇÕES E RESPOSTA DINÂMICA DE ROTORES DE CASCAS AXISSIMÉTRICAS

4.1. Introdução

Em muitas aplicações de engenharia, certos sistemas de rotores são constituídos essencialmente de cascas de revolução (principalmente cilíndricas), girando em torno do eixo longitudinal.

Para dar uma idéia geral destas aplicações, citam-se a seguir alguns rotores deste tipo, com suas principais características:

a) Moinhos de pelotização de grande porte.

Características: comprimento $\approx 10\text{m}$, diâmetro $\approx 5\text{m}$,
velocidade de operação $\approx 20\text{ rpm}$,
função - trituração
aplicação - indústrias de mineração.

b) Moinhos de bolas de pequeno porte.

Características: comprimento $\approx 2\text{m}$, diâmetro $\approx 1\text{m}$,
velocidade de operação $\approx 50\text{ rpm}$,
função - trituração
aplicação - indústrias químicas.

c) Turbinas a gás

Características: comprimento $\approx 1\text{m}$, diâmetro $\approx 0,6\text{m}$,
velocidade de operação $\approx 5000\text{ rpm}$
função - propulsão
aplicação - indústria aeronáutica

d) Centrífugas

Características: comprimento $\approx 0.80\text{m}$, diâmetro $\approx 0.20\text{m}$
velocidade de operação $\approx 15.000\text{ rpm}$
função - separação de componentes
aplicação - diversos processos industriais.

e) Ultra-centrífuga

Características: comprimento $\approx 0.70\text{m}$, diâmetro $\approx 0.15\text{m}$
 velocidade de operação $\approx 50.000 \text{ rmp}$
 função - separação de componentes
 aplicação - enriquecimento de urânio.

As ordens de grandeza apresentadas para comprimentos, diâmetros e velocidades de operação representam valores possíveis de serem encontrados em situações reais. Embora estes valores não sejam, necessariamente, os mais frequentes, eles servem para caracterizar as faixas de variação dos principais parâmetros do problema. Nestes exemplos, observa-se que à medida que as dimensões diminuem cresce a velocidade de operação. Desse modo os moinhos de pelotização, que são de grandes dimensões, operam a baixas velocidades da ordem de 20 rpm, enquanto as ultracentrífugas podem atingir até 100.000 rpm.

De um ponto de vista mecânico tem-se a considerar os seguintes problemas:

a) Resposta dinâmica — esta análise interessa principalmente ao dimensionamento de moinhos, tendo em vista as solicitações dinâmicas, geradas pelo conteúdo e pela rotação.

b) Vibrações livres — determinação da influência da rotação sobre as frequências e modos normais de vibração.

c) Estabilidade dinâmica — determinação das regiões de ressonâncias simples e ressonâncias paramétricas do sistema.

Não foram encontradas referências sobre resposta dinâmica não linear, ou mesmo linear, de rotores de cascas axissimétricas, possivelmente porque os projetos de moinhos são baseados apenas numa análise estática, calculando-se as tensões devidas ao peso próprio e ao peso do conteúdo, e desprezando-se o efeito da rotação, [1], [2]. Os estudos dinâmicos, anteriormente realizados, visaram basicamente a determinação de frequências e modos normais de vibração, com o principal objetivo de evitar ressonância e fadiga em componentes de turbinas.

O mecanismo de vibração de rotores de cascas cilíndricas foi estudado por Macke [4], que demonstrou a existência de ondas móveis na direção circunferencial, usando a teoria inextensional de anéis. Através de um argumento mecânico simples, Macke justifica o surgimento de ondas móveis: quando uma partícula da casca move-se radialmente para dentro, por conservação da quantidade de movimento angular, há uma tendência de crescimento da velocidade desta partícula na direção da rotação. Por este argumento, a velocidade de uma onda movendo-se no mesmo sentido da rotação deve ser menor do que a velocidade desta mesma onda movendo-se no sentido oposto. O que é confirmado pela teoria.

Srinivasan e Lauterbach [5] estudaram os efeitos combinados de rotação e torque inicial em cascas cilíndricas infinitamente longas, mostrando que neste caso os modos normais de vibração são ondas móveis na direção circunferencial e na direção longitudinal. Penzes e Kraus [6] determinariam as frequências e modos normais de vibração (na forma complexa) de rotores de cascas cilíndricas pré-tensadas, com condições de contorno homogêneas quaisquer. Padovan [8] usando o método dos elementos finitos combinado com um desenvolvimento em série de Fourier complexa, estudou a influência da rotação em cascas axissimétricas anisotrópicas, sujeitas a um estado inicial axissimétrico.

Neste capítulo estudam-se os problemas de vibração livre e resposta dinâmica de rotores de cascas cônicas axissimétricas, utilizando a teoria não linear de cascas delgadas, apresentada no capítulo anterior. Através de uma decomposição em série de Fourier complexa, na direção circunferencial, mostra-se que o peso próprio e o peso do conteúdo, embora sejam cargas estáticas (intensidade constante no tempo), geram excitações dinâmicas periódicas no tempo. Usando uma aproximação de elementos finitos na direção longitudinal obtêm-se soluções periódicas lineares e não lineares, correspondentes a estas excitações. O problema de resposta transiente é estudado por meio de uma discretização de diferença finita no tempo e aproximação de elemento finito na direção longitudinal.

A particularização deste estudo a cascas cônicas delgadas, não significa uma limitação do método de análise empregado

neste trabalho, com ela procurou-se apenas estudar a situação mais comum, capaz de cobrir os exemplos de aplicações práticas citados inicialmente. Entretanto, outras situações existem, como por exemplo discos espessos, onde a teoria de cascas delgadas não se aplicaria eficientemente. Neste caso poderia ser usada a teoria de cascas espessas apresentada no capítulo anterior, ou mesmo tratar o problema como um sólido de revolução.

4.2. Formulação do problema

Neste estudo será utilizada como configuração de referência, a configuração dinâmica gerada pela rotação rígida da casca em torno do seu eixo longitudinal. Esta configuração é denominada configuração de referência dinâmica, e a base intrínseca associada será chamada base dinâmica intrínseca.

De acordo com a transformação (2.27), a aceleração absoluta de um ponto qualquer da superfície média de uma casca cônica, referida a base dinâmica intrínseca é

$$\frac{d^2 \underline{u}}{dt^2} = \ddot{\underline{u}} + 2 \underline{\Omega} \underline{Z} \dot{\underline{u}} + \underline{\Omega}^2 \underline{Z}^2 \underline{u} + \dot{\underline{\Omega}} \underline{Z} \underline{u} + \underline{a}_0, \quad (4.1)$$

onde \underline{u} é o campo de deslocamentos medido a partir da configuração dinâmica de referência, e $\dot{\underline{u}}$ e $\ddot{\underline{u}}$ são os campos de velocidades e acelerações relativas na superfície média. $\underline{\Omega}$ é a velocidade de rotação da casca, e \underline{Z} é um tensor antissimétrico cujas componentes não nulas, na base dinâmica intrínseca $\{\underline{e}_i\}$, são:

$$\begin{aligned} Z_{12} &= -Z_{21} = \sin \alpha, \\ Z_{23} &= -Z_{32} = \cos \alpha, \end{aligned} \quad (4.2a,b)$$

\underline{a}_0 é a aceleração da origem do sistema dinâmico, dada por

$$\underline{a}_0 = -\Omega^2 R_0 (\sin \alpha \underline{e}_1 + \cos \alpha \underline{e}_3) + \dot{\Omega} R_0 \underline{e}_2 \quad (4.3)$$

Portanto, a expressão do princípio dos trabalhos virtuais para uma casca cônica delgada referida à configuração dinâmica é,

$$\hat{R} = \int_0^L \int_0^{2\pi} \rho h (\ddot{u} + 2\Omega \dot{z} \dot{u} + \Omega^2 z^2 u + \dot{\Omega} z u + a_0) \cdot \hat{u} R_0 d\theta ds + \\ + \int_0^L \int_0^{2\pi} (\underline{N} \cdot \hat{E}^0 + \underline{M} \cdot \hat{E}^1) R_0 d\theta ds, \quad (4.4)$$

onde \hat{R} é o trabalho virtual das forças externas (excluindo as forças de inércia), L é o comprimento, h é a espessura, ρ a massa específica, e Ω a velocidade de rotação rígida da casca.

Além do efeito da rotação serão consideradas ações de superfície decorrentes de um carregamento parcialmente distribuído sobre a superfície média, mas que não acompanha o movimento de rotação rígida da casca. Este carregamento pode ser facilmente descrito em termos de uma variável angular η , tal que

$$\theta = \eta + \Omega t, \quad (4.5)$$

o que permite escrever

$$\hat{R} = \int_{L_1}^{L_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} p(s, \eta) \cdot \hat{u}(s, \eta + \Omega t) R_0 d\eta ds, \quad (4.6)$$

onde L_1 e L_2 definem os círculos paralelos e η_1 e η_2 os meridianos que limitam a região da superfície média onde atua o carregamento.

Este tipo de carregamento pode simular, por exemplo, o peso do conteúdo dos moinhos, que, por razões funcionais, não deve acompanhar a rotação do casco. Pode ainda representar a componente transversal do peso próprio da casca, cuja intensidade é função de s e η . Fig. 4.1.

Os campos tensoriais \underline{N} e \underline{M} representam os esforços e momentos resultantes, definidos pelas equações (2.60a,b).

As componentes do tensor de deformação da superfície média e do tensor de variação da curvatura da superfície média, neste caso são, respectivamente:

$$E^0_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} B_{j\alpha} B_{j\beta}; \quad E^1_{\alpha\beta} = \chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (C_{\alpha\beta} + C_{\beta\alpha}) \quad (4.7a,b)$$

onde, $A_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\beta}$ e $C_{\alpha\beta}$ são dados pelas equações (3.68) a (3.71).

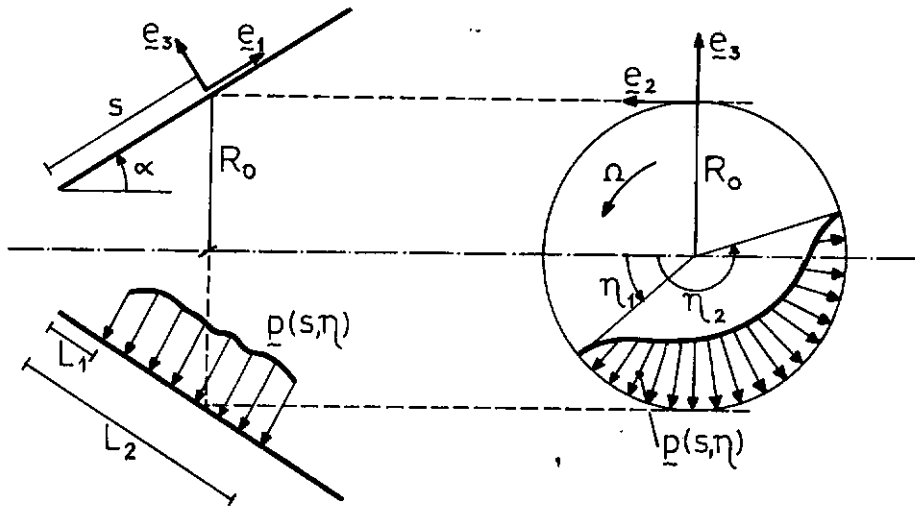


Fig. 4.1 - Casca cônica com um carregamento interno.

Admitindo relações constitutivas elásticas lineares ,
pode-se escrever:

$$\tilde{N} = \tilde{D} \tilde{E}^0 ; \tilde{M} = \tilde{G} \tilde{E}^1, \quad (4.8a,b)$$

onde \tilde{D} e \tilde{G} são tensores de elasticidade de quarta ordem, duplamente simétricos, já que \tilde{E}^0 e \tilde{E}^1 são simétricos e no caso de cascas delgadas \tilde{N} e \tilde{M} também são simétricos.

Tendo em vista a periodicidade do problema na variável circunferencial θ , será usada uma aproximação em série de Fourier complexa nesta variável, para representar o campo de deslocamentos, isto é,

$$\tilde{u} \approx \tilde{u}^M = \sum_{m=-M}^M \tilde{u}_m(s, t) e^{im\theta} \quad (4.9)$$

onde,

$$\tilde{u}_m(s, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(s, \theta, t) e^{-im\theta} d\theta, \quad (4.10)$$

é a amplitude do harmônico m , e M representa um inteiro suficientemente grande, correspondente ao truncamento da série.

Em consequência de (4.9), as deformações são aproximadas por:

$$\begin{aligned}
\tilde{A}(s, \theta, t) &\approx \tilde{A}^M(s, \theta, t) = \sum_{m=-M}^M \tilde{A}_m(s, t) e^{+im\theta}, \\
\tilde{B}(s, \theta, t) &\approx \tilde{B}^M(s, \theta, t) = \sum_{m=-M}^M \tilde{B}_m(s, t) e^{+im\theta}, \\
\tilde{\chi}(s, \theta, t) &\approx \tilde{\chi}^M(s, \theta, t) = \sum_{m=-M}^M \tilde{\chi}_m(s, t) e^{+im\theta}, \quad (4.10a-c)
\end{aligned}$$

e os esforços e momentos resultantes por:

$$\begin{aligned}
\tilde{N}(s, \theta, t) &\approx \tilde{N}^M(s, \theta, t) = \sum_{m=-M}^M \tilde{N}_m(s, t) e^{+im\theta} \\
\tilde{M}(s, \theta, t) &\approx \tilde{M}^M(s, \theta, t) = \sum_{m=-M}^M \tilde{M}_m(s, t) e^{+im\theta} \quad (4.11a,b)
\end{aligned}$$

Admitindo homogeneidade nas relações constitutivas na direção circunferencial, pode-se escrever

$$\begin{aligned}
\tilde{N}_m &\approx \tilde{D}(\tilde{A}_m + \frac{1}{2} \sum_{\ell=-M}^M \tilde{B}_{m-\ell}^T \tilde{B}_\ell) \\
\tilde{M}_m &= \tilde{G} \tilde{\chi}_m, \quad (4.12a,b)
\end{aligned}$$

Substituindo (4.9) a (4.12a,b) na expressão (4.4) do princípio dos trabalhos virtuais e considerando que,

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta} e^{in\theta} d\theta = \begin{cases} 0, & \text{para } m \neq -n, \\ 2\pi, & \text{para } m = -n, \end{cases} \quad (4.13)$$

obtem-se o seguinte sistema de equações, resultante da decomposição de Fourier:

$$\begin{aligned}
&\langle \rho h(\ddot{u}_m + 2\Omega \dot{\tilde{u}}_m + \Omega^2 \tilde{Z}^2 \tilde{u}_m + \dot{\tilde{\Omega}} \tilde{Z} \tilde{u}_m), \hat{\tilde{u}}_{-m} \rangle + \mathcal{E}(\tilde{u}_m, \hat{\tilde{u}}_{-m}) + \\
&+ \sum_{\ell=-M}^M \left\{ \frac{1}{2} \langle \tilde{D} \tilde{B}_{m-\ell}^T \tilde{B}_\ell, \hat{\tilde{A}}_{-m} \rangle + \langle \tilde{B}_{m-\ell} \tilde{N}_\ell, \hat{\tilde{B}}_{-m} \rangle \right\} = j_m(\hat{\tilde{u}}_{-m}) e^{-im\Omega t}
\end{aligned}$$

para $m = -M, \dots, M$, (4.14)

onde foram introduzidas as seguintes definições:

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \int_0^L \underline{u} \cdot \underline{v} \, 2\pi R_0 \, ds \quad (4.15)$$

$$\mathfrak{L}(\underline{u}_m, \hat{\underline{u}}_{-m}) = \langle \underline{D} \, \underline{A}_m, \hat{\underline{A}}_{-m} \rangle + \langle \underline{G} \, \underline{\chi}_m, \hat{\underline{\chi}}_{-m} \rangle, \quad (4.16)$$

$$j_m(\hat{\underline{u}}_{-m}) = \int_{L_1}^{L_2} \underline{F}_m \cdot \hat{\underline{u}}_{-m} \, R_0 \, ds, \text{ para } m \neq 0, \quad (4.17)$$

$$j_0(\hat{\underline{u}}_0) = \langle \underline{a}_0, \hat{\underline{u}}_0 \rangle + \int_{L_1}^{L_2} \underline{F}_0 \cdot \hat{\underline{u}}_0 \, R_0 \, ds. \quad (4.18)$$

O vetor \underline{F}_m decorre da decomposição de (4.6), e é dado por

$$\underline{F}_m = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \underline{p}(s, \eta) e^{-im\eta} \, d\eta. \quad (4.19)$$

Observa-se que $\mathfrak{L}(\underline{u}_m, \hat{\underline{u}}_{-m})$ corresponde à parte linear, enquanto que a somatória representa a parte não linear do operador. Esta não linearidade decorre da consideração de grandes deformações e implica num acoplamento entre os harmônicos.

4.3. Resposta transiente não linear

Soluções aproximadas do problema (4.14), num intervalo fechado $[0, T]$, serão obtidas por meio de uma discretização de diferença finita no tempo, associada à uma aproximação de elementos finitos no domínio espacial.

Para se construir a aproximação de diferença finita, divide-se o intervalo $[0, T]$ em N subintervalos de comprimento $\Delta t = T/N$, e aproximam-se velocidades e acelerações, no instante $t_{(n)} = n\Delta t$, por:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{u}}_m^{(n)} &= \frac{\underline{u}_m^{(n+1)} - \underline{u}_m^{(n-1)}}{2\Delta t} \\ \ddot{\underline{u}}_m^{(n)} &= \frac{\underline{u}_m^{(n+1)} - 2\underline{u}_m^{(n)} + \underline{u}_m^{(n-1)}}{\Delta t^2}. \end{aligned} \quad (4.20a,b)$$

Será usado um esquema implícito na discretização dos termos lineares do operador e explícito nos termos não lineares [32], [33], [34], isto é:

$$\begin{aligned}
 \langle \underline{u}_m, \hat{\underline{u}}_{-m} \rangle^{(n)} &= \langle \delta \underline{u}_m^{(n+1)} + (1-2\delta)\underline{u}_m^{(n)} + \delta \underline{u}_m^{(n-1)}, \hat{\underline{u}}_{-m} \rangle, \\
 \varepsilon(\underline{u}_m, \hat{\underline{u}}_{-m})^{(n)} &= \varepsilon(\delta \underline{u}_m^{(n+1)} + (1-2\delta)\underline{u}_m^{(n)} + \delta \underline{u}_m^{(n-1)}, \hat{\underline{u}}_{-m}), \\
 \langle \underline{D} \underline{B}_{m-\ell}^T \underline{B}_\ell, \hat{\underline{A}}_{-m} \rangle^{(n)} &= \langle \underline{D} \underline{B}_{m-\ell}^{(n)T} \underline{B}_\ell^{(n)}, \hat{\underline{A}}_{-m} \rangle, \\
 \langle \underline{B}_{m-\ell} \underline{N}_\ell, \hat{\underline{B}}_{-m} \rangle^{(n)} &= \langle \underline{B}_{m-\ell}^{(n)} \underline{N}_\ell^{(n)}, \hat{\underline{B}}_{-m} \rangle, \quad (4.21a-d)
 \end{aligned}$$

onde $0 < \delta < 0.5$ é um parâmetro livre, a ser fixado em cada análise. Para $\delta = 0$ o esquema implícito torna-se explícito.

Substituindo (4.20a,b) e (4.21a-d) na equação (4.14) obtem-se o conjunto de equações desacopladas:

$$\begin{aligned}
 \alpha_0(\underline{u}_m^{(n+1)}, \hat{\underline{u}}_{-m}) + \Delta t \Omega_{(n)} \alpha_1(\underline{u}_m^{(n+1)}, \hat{\underline{u}}_{-m}) + \delta \Delta t^2 \Omega_{(n)}^2 \alpha_2(\underline{u}_m^{(n+1)}, \hat{\underline{u}}_{-m}) + \\
 \delta \Delta t^2 \dot{\Omega}_{(n)} \alpha_1(\underline{u}_m^{(n+1)}, \hat{\underline{u}}_{-m}) + \delta \Delta t^2 \varepsilon(\underline{u}_m^{(n+1)}, \hat{\underline{u}}_{-m}) = f_m^{(n)}(\hat{\underline{u}}_{-m}),
 \end{aligned}$$

para $m = -M, \dots, M$, (4.22)

sendo:

$$\begin{aligned}
 \alpha_0(\underline{u}_m, \hat{\underline{u}}_{-m}) &= \langle \rho h \underline{u}_m, \hat{\underline{u}}_{-m} \rangle, \\
 \alpha_1(\underline{u}_m, \hat{\underline{u}}_{-m}) &= \langle \rho h \underline{Z} \underline{u}_m, \hat{\underline{u}}_{-m} \rangle, \\
 \alpha_2(\underline{u}_m, \hat{\underline{u}}_{-m}) &= \langle \rho h \underline{Z}^2 \underline{u}_m, \hat{\underline{u}}_{-m} \rangle, \quad (4.23a-c)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_m^{(n)}(\hat{\underline{u}}_{-m}) &= \Delta t^2 j_m(\hat{\underline{u}}_{-m}) e^{im\Omega_{(n)} t_{(n)}} + \alpha_0(2\underline{u}_m^{(n)} - \underline{u}_m^{(n-1)}, \hat{\underline{u}}_{-m}) + \\
 + \Delta t \Omega_{(n)} \alpha_1(\underline{u}_m^{(n-1)}, \hat{\underline{u}}_{-m}) - \Delta t^2 \Omega_{(n)}^2 \alpha_2((1-2\delta)\underline{u}_m^{(n)} + \delta \underline{u}_m^{(n-1)}, \hat{\underline{u}}_{-m}) - \\
 - \Delta t^2 \dot{\Omega}_{(n)} \alpha_1((1-2\delta)\underline{u}_m^{(n)} + \delta \underline{u}_m^{(n-1)}, \hat{\underline{u}}_{-m}) - \\
 - \Delta t^2 \sum_{\ell=-M}^M \left[\frac{1}{2} \langle \underline{D} \underline{B}_{m-\ell}^{(n)T} \underline{B}_\ell^{(n)}, \hat{\underline{A}}_{-m} \rangle + \langle \underline{B}_{m-\ell}^{(n)} \underline{N}_\ell^{(n)}, \hat{\underline{B}}_{-m} \rangle \right]
 \end{aligned}$$

(4.24)

As condições iniciais, que vão permitir o avanço do processo de integração no tempo, são:

$$\begin{aligned}\underline{u}_m^{(0)} &= \underline{u}_m(0), \\ \underline{u}_m^{(1)} &= \underline{u}_m(0) + \Delta t \dot{\underline{u}}_m(0).\end{aligned}\quad (4.25a,b)$$

Uma aproximação de elementos finitos da equação (4.22) conduz ao conjunto de sistemas de equações algébricas lineares,

$$\left[\underline{M} + \Omega_{(n)} \Delta t \underline{C} + \delta \Delta t^2 (\Omega_{(n)}^2 \underline{G} + \dot{\Omega}_{(n)} \underline{C} + \underline{K}_m) \right] \underline{U}_m^{(n+1)} = \underline{F}_m^{(n)}$$

para $m = -M \dots M$, (4.26)

onde \underline{M} , \underline{C} , \underline{G} e \underline{K}_m são matrizes globais obtidas a partir das contribuições das correspondentes matrizes dos elementos, de acordo com o procedimento típico do método dos elementos finitos. \underline{M} , \underline{C} e \underline{G} resultam, respectivamente, da discretização dos funcionais lineares α_0 , α_1 e α_2 definidos em (4.23a-c), e não dependem do harmônico. \underline{K}_m resulta da discretização do funcional linear \mathcal{E} definido em (4.16), e varia com o harmônico m . As matrizes \underline{M} , \underline{C} e \underline{K}_m são normalmente chamadas matrizes de massa, de Coriolis e de rigidez do harmônico m , enquanto que a matriz \underline{G} poderia ser chamada de rigidez centrífuga, já que resulta da aceleração centrífuga. O vetor $\underline{U}_m^{(n+1)}$ contém incógnitos nodais correspondentes às amplitudes do harmônico m , no instante $(n+1)$, e o vetor $\underline{F}_m^{(n)}$, correspondente ao termo independente de (4.26), resulta da discretização de elementos finitos de $\underline{f}_m^{(n)}(\hat{u}_{-m})$.

Observa-se que as matrizes de (4.26) têm as seguintes propriedades:

1) $\underline{M} = \underline{M}^T$ é real, simétrica e positiva definida, consequência de:

$$\begin{aligned}\alpha_0(\underline{u}, \underline{v}) &= \langle \text{ph } \underline{u}, \underline{v} \rangle = \alpha_0(\underline{v}, \underline{u}), \quad \forall \underline{u}, \underline{v}, \quad \text{e} \\ \alpha_0(\underline{u}, \underline{u}) &> 0, \quad \text{e} \quad \alpha_0(\underline{u}, \underline{u}) = 0 \Leftrightarrow \underline{u} = \underline{0},\end{aligned}\quad (4.27a,b)$$

2) $\tilde{C} = -\tilde{C}^T$ é real e antissimétrica, consequência de:

$$a_1(\underline{u}, \underline{v}) = \langle \rho h \tilde{Z} \underline{u}, \underline{v} \rangle = \langle \rho h \tilde{Z}^T \underline{v}, \underline{u} \rangle = -\langle \rho h \tilde{Z} \underline{v}, \underline{u} \rangle ,$$

$$\therefore a_1(\underline{u}, \underline{v}) = -a_1(\underline{v}, \underline{u}) , \forall \underline{u}, \underline{v}, \quad (4.28)$$

3) $\tilde{G} = \tilde{G}^T$ é real, simétrica e negativa, consequência de:

$$a_2(\underline{u}, \underline{v}) = \langle \rho h \tilde{Z}^2 \underline{u}, \underline{v} \rangle = \langle \rho h \tilde{Z}^T \underline{v}, \tilde{Z} \underline{u} \rangle = -\langle \rho h \tilde{Z} \underline{v}, \tilde{Z} \underline{u} \rangle$$

$$\therefore a_2(\underline{u}, \underline{v}) = a_2(\underline{v}, \underline{u}) , \forall \underline{u}, \underline{v}, \text{ e}$$

$$a_2(\underline{u}, \overline{\underline{u}}) < 0 , \forall \underline{u} , \quad (4.29a,b)$$

4) $\tilde{K}_m = \overline{\tilde{K}_m}^T$ é complexa, Hermitiana e positiva, consequência de:

$$\mathfrak{L}(\underline{u}, \underline{v}) = \mathfrak{L}(\underline{v}, \underline{u}) , \forall \underline{u}, \underline{v}, \text{ e}$$

$$\mathfrak{L}(\underline{u}, \overline{\underline{u}}) \geq 0 , \forall \underline{u}, \quad (4.30a,b)$$

o que pode ser facilmente demonstrado, a partir de (4.16) e da simetria de \tilde{D} e \tilde{G} .

Para condições de contorno adequados, deve-se ter

$$\mathfrak{L}(\underline{u}, \overline{\underline{u}}) = 0 \iff \underline{u} = \underline{0}, \quad (4.31)$$

e neste caso \tilde{K}_m é positiva definida.

A solução de (4.26) fornece a aproximação de elementos finitos para as amplitudes dos deslocamentos nodais do harmônico genérico m , no instante $n+1$. Observa-se, portanto, que no cálculo da solução \underline{u} do problema (4.4), três tipos de aproximação foram feitas:

1) aproximação em série de Fourier na direção circunferencial;

2) aproximação no tempo — discretização de diferença finita;

3) aproximação de elementos finitos na direção longitudinal.

A análise dos erros envolvidos em cada uma destas aproximações não está dentro do objetivo deste trabalho. A título de observação, pode-se afirmar que dentro de cada intervalo Δt , esta questão se resume à análise dos erros envolvidos num modelo linear de elementos finitos [35], [36], combinado com uma aproximação em série de Fourier, [37], [38]. Entretanto, a convergência local (em cada Δt), não significa necessariamente que o esquema de integração proposto é convergente, pois resta provar que a aproximação de diferença finita converge quando Δt tende a zero. Para problemas lineares o teorema da equivalência de Lax [32], garante a convergência se e somente se o operador de diferença finita for estável e consistente. No caso de operadores não lineares, o teorema de Lax não se aplica, mas o conceito de estabilidade, como limitação das soluções da equação de diferenças, continua válido e necessário para a convergência.

4.4. Resposta não linear em regime

Para Ω constante ($\dot{\Omega}=0$), a equação (4.14) admite solução particular, da forma

$$\tilde{u}_m(s, t) = \tilde{u}_m^*(s) e^{-im\Omega t}, \text{ para } m = -M, \dots, M, \quad (4.32)$$

onde $\tilde{u}_m^*(s)$ é a amplitude do harmônico m .

Substituindo (4.32) em (4.14) com $\dot{\Omega} = 0$, obtém-se o sistema de equações não lineares,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\tilde{u}_m^*, \hat{\tilde{u}}_{-m}) + \sum_{\ell=-M}^M \left\{ \frac{1}{2} \langle \tilde{B}_{m-\ell}^{*T} \tilde{B}_{\ell}^*, \hat{A}_{-m} \rangle + \langle \tilde{B}_{m-\ell}^* \tilde{N}_{\ell}^*, \tilde{B}_{-m} \rangle \right\} - \\ - \Omega^2 \langle \text{ph}(m^2 \mathbb{I} + 2i\tilde{Z} - \tilde{Z}^2) \tilde{u}_m^*, \hat{\tilde{u}}_{-m} \rangle = j_m(\hat{\tilde{u}}_{-m}), \end{aligned} \quad (4.33)$$

cujas soluções fornece a amplitude \tilde{u}_m^* da solução periódica (4.32).

Para resolução de (4.33) usou-se um esquema incremental e iterativo, desacoplado nos diversos harmônicos, que pode ser definido através dos seguintes passos:

1) a amplitude do vetor de ações é dividida em N incrementos;

2) dentro de cada incremento n define-se

$$\tilde{u}_{m(n)}^{*(k+1)} = \tilde{u}_{m(n)}^{*(k)} + \tilde{u}_m^{(k)}, \quad (4.34)$$

onde $k+1$ é a ordem da iteração que está sendo realizada;

3) para a primeira iteração admite-se,

$$\tilde{u}_{m,n}^{*(0)} = \tilde{u}_{m,n-1}. \quad (4.35)$$

4) a equação de incrementos entre duas iterações seguidas é obtida substituindo (4.34) em (4.33). Após a linearização e desprezando-se os termos de acoplamento dos diversos harmônicos resulta o seguinte conjunto de equações lineares,

$$\varepsilon_0(\tilde{u}_m^{(k)}, \hat{\tilde{u}}_{-m}) - \Omega^2 \langle \rho h(m^2 I + 2i_m Z - Z^2) \tilde{u}_m^{(k)}, \hat{\tilde{u}}_{-m} \rangle = p_{m(n)}^{(k)}(\hat{\tilde{u}}_{-m}), \quad (4.36)$$

para $m = -M, \dots, M$,

onde:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(\tilde{u}_m^{(k)}, \hat{\tilde{u}}_{-m}) &= \langle D(A_m^{(k)} + \tilde{B}_0^{*(k)T} \tilde{B}_m^{(k)}), (\hat{\tilde{A}}_{-m} + \tilde{B}_0^{*(k)T} \hat{\tilde{B}}_{-m}) \rangle + \\ &+ \langle \tilde{B}_m^{(k)} \tilde{N}_0^{*(k)}, \hat{\tilde{B}}_{-m} \rangle + \langle \tilde{G} \tilde{\chi}_m^{(k)}, \hat{\tilde{\chi}}_{-m} \rangle, \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} p_{m(n)}^{(k)}(\hat{\tilde{u}}_{-m}) &= j_{m,n}(\hat{\tilde{u}}_{-m}) + \Omega^2 \langle \rho h(m^2 I + 2i_m Z - Z^2) \tilde{u}_{m(n)}^{*(k)}, \hat{\tilde{u}}_{-m} \rangle - \\ &- \langle \tilde{N}_{m(n)}^{*(k)}, \hat{\tilde{A}}_{-m} \rangle - \langle \tilde{M}_{m(n)}^{*(k)}, \hat{\tilde{\chi}}_{-m} \rangle - \sum_{\ell=-M}^M \langle \tilde{B}_{m-\ell}^{*(k)} \tilde{N}_{\ell(n)}^{*(k)}, \hat{\tilde{B}}_{-m} \rangle. \end{aligned} \quad (4.38)$$

5) A convergência do processo iterativo é atingida quando

$$\sum_{\ell=-M}^M \|\tilde{u}_{\ell}^{(k)}\|_0 < \delta, \quad (4.39)$$

onde δ é uma tolerância pré-fixada e,

$$\| \underline{u}_\ell^{(k)} \|_0 = \left(\int_0^L \underline{u}_\ell \cdot \overline{\underline{u}}_\ell \, ds \right)^{1/2}, \quad (4.40)$$

$\overline{\underline{u}}_\ell$ é o conjugado de \underline{u}_ℓ .

Do mesmo modo que na discretização de diferença finita, procurou-se evitar o acoplamento entre os diversos harmônicos, transferindo-o para os termos independentes de (4.36).

A aproximação de elementos finitos da equação (4.36) é representada pelo conjunto de equações algébricas lineares.

$$\left[\underline{K}_{m(n)}^{(k)} - \Omega^2 (m^2 \underline{M} + 2im\underline{C} - \underline{G}) \right] \underline{U}_{m(n)}^{(k+1)} = \underline{P}_{m(n)}^{(k)},$$

$$\text{para } m = -M, \dots, M, \quad (4.41)$$

cujas soluções são a aproximação de elementos finitos para o acréscimo de deslocamentos entre as iterações k e $k+1$, no incremento n .

A matriz $\underline{K}_{m(n)}^{(k)}$ resulta da discretização de \underline{K}_0 , e é chamada matriz de rigidez tangente. Do ponto de vista computacional é quase sempre, vantajoso iterar mantendo esta matriz constante dentro de cada incremento n , e igual a $\underline{K}_{m(n)}^{(0)}$. O vetor $\underline{P}_{m(n)}^{(k)}$ é obtido da discretização de elementos finitos de $\underline{P}_{m(n)}^{(k)}$, definido em (4.38).

4.5. Vibrações autônomas lineares

Linearizando (4.14) com $\dot{\Omega} = 0$, em torno de um estado inicial axissimétrico conhecido $(\underline{u}_0, \underline{N}_0)$ obtem-se o problema de vibrações lineares em torno deste estado inicial, representado pelo conjunto de equações lineares, desacopladas:

$$\alpha_0 (\ddot{\underline{u}}_m, \hat{\underline{u}}_{-m}) + 2\Omega \alpha_1 (\dot{\underline{u}}_m, \hat{\underline{u}}_{-m}) + \Omega^2 \alpha_2 (\underline{u}_m, \hat{\underline{u}}_{-m}) + \varepsilon (\underline{u}_m, \hat{\underline{u}}_{-m}) + \eta_0 (\underline{u}_m, \hat{\underline{u}}_{-m}) = j_m (\hat{\underline{u}}_{-m}) e^{-im\Omega t},$$

$$\text{para } m = -M, \dots, M, \quad (4.42)$$

onde,

$$\eta_0(\underline{u}_m, \hat{\underline{u}}_{-m}) = \langle \underline{D} \underline{A}_m, \underline{B}_0^T \hat{\underline{B}}_{-m} \rangle + \langle \underline{D} \underline{B}_0^T \underline{B}_m, \hat{\underline{A}}_{-m} \rangle + \\ + \langle \underline{D} \underline{B}_0^T \underline{B}_m, \underline{B}_0^T \hat{\underline{B}}_{-m} \rangle + \langle \underline{B}_m \underline{N}_0, \hat{\underline{B}}_{-m} \rangle, \quad (4.43)$$

α_0 , α_1 , α_2 estão definidos em (4.23a-c), e ξ e j_m em (4.16) e (4.17) respectivamente.

Como se pode observar de (4.42), a restrição a estados iniciais axissimétricos simplifica significativamente o estudo das vibrações lineares, pois neste caso não ocorre acoplamento entre diferentes harmônicos. Por esta razão, os estudos desenvolvidos nesta área, têm sido limitados, quase exclusivamente, a este tipo de problema, [8], [11], [39], [40]. No caso específico de vibrações de cascas axissimétricas com movimento de rotação os estudos anteriormente realizados, dizem respeito a vibrações lineares autônomas, isto é, em torno de estados de equilíbrio estático.

Apresentam-se, a seguir, os principais resultados obtidos nesta área, no que diz respeito a vibrações livres, estabilidade de equilíbrio, resposta em regime e ressonância simples.

4.5.1. Vibrações livres

Substituindo, na forma homogênea associada a (4.42), \underline{u}_m por

$$\underline{u}_m = \underline{v}_m e^{i\omega_m t}, \quad (4.44)$$

obtem-se o problema de autovalor em ω_m .

$$-\omega_m^2 \alpha_0(\underline{v}_m, \hat{\underline{v}}_{-m}) + 2i\omega_m \Omega \alpha_1(\underline{v}_m, \hat{\underline{v}}_{-m}) + \Omega^2 \alpha_2(\underline{v}_m, \hat{\underline{v}}_{-m}) + \\ \xi(\underline{v}_m, \hat{\underline{v}}_{-m}) + \eta_0(\underline{v}_m, \hat{\underline{v}}_{-m}) = 0, \text{ para } m = -M, \dots, M, \quad (4.45)$$

correspondente a vibrações livres de cascas cônicas girando em torno do eixo longitudinal com velocidade de rotação Ω .

A discretização de elementos finitos de (4.45) conduz ao problema de autovalor algébrico,

$$(-\omega_m^2 \underline{M} + 2i\omega_m \Omega \underline{C} + \Omega^2 \underline{G} + \underline{K}_m + \underline{G}_m) \underline{V}_m = 0, \quad (4.46)$$

cujos autovalores ω_m e os autovetores \underline{V}_m são aproximações de elementos finitos das frequências naturais e amplitudes dos modos normais de vibração respectivamente. As matrizes \underline{M} , \underline{C} , \underline{G} e \underline{K}_m foram definidas anteriormente, \underline{G}_m decorre da discretização de η_0 dado por (4.43), e é comumente chamada de matriz de rigidez geométrica, correspondente ao harmônico m .

Este problema de autovalor algébrico foi resolvido, para ω_m real, usando a rotina desenvolvida por Gupta [41], para o estudo de vibrações livres de estruturas com "spin", como por exemplo plataformas espaciais, onde a equação de autovalor algébrico resultante da discretização de elementos finitos é também do tipo (4.46).

Resumem-se, a seguir, as principais propriedades do problema de autovalor (4.45):

a) Quanto a forma dos modos

Devido à influência da aceleração de Coriolis, representada pelo funcional a_1 , os modos normais de vibração de rotores de cascas axissimétricas são ondas móveis circunferencialmente:

- no mesmo sentido da rotação,
(*forward traveling waves*)

$$\underline{v}^1 = \underline{v}_m^1 e^{i(m\theta + \omega_m t)} + \overline{\underline{v}}_m^1 e^{-i(m\theta + \omega_m t)}, \quad (4.47)$$

- no sentido oposto à rotação
(*backward traveling waves*)

$$\underline{v}^2 = \underline{v}_m^2 e^{i(m\theta - \omega_m t)} + \overline{\underline{v}}_m^2 e^{-i(m\theta - \omega_m t)}, \quad (4.48)$$

Na forma trigonométrica tem-se:

$$\underline{v}^1 = 2 \operatorname{Re}(\underline{v}_m^1) \cos(m\theta + \omega_m t) - 2 \operatorname{Im}(\underline{v}_m^1) \operatorname{sen}(m\theta + \omega_m t),$$

$$\underline{v}^2 = 2 \operatorname{Re}(\underline{v}_m^2) \cos(m\theta - \omega_m t) - 2 \operatorname{Im}(\underline{v}_m^2) \operatorname{sen}(m\theta - \omega_m t),$$

tornando evidente a característica de ondas móveis apresentada pelos modos normais de vibração de cascas axissimétricas com velocidade de rotação $\Omega \neq 0$, ao contrário do caso estacionário ($\Omega = 0$), onde os modos normais de vibração podem sempre ser postos na forma

$$\underline{v} = \{\text{Re}(\underline{v}_m) \cos m\theta + \text{Im}(\underline{v}_m) \sin m\theta\}(\cos \omega_m t \text{ ou } \sin \omega_m t) \quad (4.49)$$

A presença de torque no estado inicial, gera ondas móveis no sentido longitudinal [5], [6], [7]. Para numa casca cilíndrica de comprimento infinito, sujeita a rotação e a torque inicial, a forma dos modos normais de vibração, de acordo com a referência [7], é:

$$\begin{aligned} \underline{v}^{11} &= 2\text{Re}(\underline{v}_{mn}^{11}) \cos(m\theta + \lambda_n s + \omega_{mn} t) - 2\text{Im}(\underline{v}_{mn}^{11}) \sin(m\theta + \lambda_n s + \omega_{mn} t), \\ \underline{v}^{12} &= 2\text{Re}(\underline{v}_{mn}^{12}) \cos(m\theta - \lambda_n s + \omega_{mn} t) - 2\text{Im}(\underline{v}_{mn}^{12}) \sin(m\theta - \lambda_n s + \omega_{mn} t). \end{aligned} \quad (4.50)$$

onde λ_n é o comprimento de onda na direção longitudinal.

b) Bifurcações no espectro de frequências

Fazendo $\hat{\underline{v}}_{-m} = \overline{\underline{v}}_m$ na equação de autovalor (4.45), obtém-se a equação algébrica,

$$\begin{aligned} \omega_m^2 \alpha_0(\underline{v}_m, \overline{\underline{v}}_m) - 2i \omega_m \Omega \alpha_1(\underline{v}_m, \overline{\underline{v}}_m) - \Omega^2 \alpha_2(\underline{v}_m, \overline{\underline{v}}_m) - \\ - \varepsilon(\underline{v}_m, \overline{\underline{v}}_m) - \eta_0(\underline{v}_m, \overline{\underline{v}}_m) = 0, \text{ para } m = -M, \dots, M \end{aligned} \quad (4.51)$$

que resolvida em ω_m , fornece uma generalização do quociente de Rayleigh do tipo,

$$\omega_m^{(1,2)} = \frac{\Omega b \pm \sqrt{\Omega^2 b^2 + 4 \alpha_0 (\Omega^2 \alpha_2 + \varepsilon + \eta_0)}}{2 \alpha_0}, \quad (4.52)$$

onde,

$$b = 2i \alpha_1(\underline{v}_m, \overline{\underline{v}}_m). \quad (4.53)$$

De (4.52) e das definições de a_0 , a_1 , a_2 , ξ e η_0 podem ser obtidas algumas conclusões relativas à influência da rotação e do estado inicial considerado sobre o espectro de frequências da casca.

1) Influência da aceleração de Coriolis

Em (4.52), a influência da aceleração de Coriolis está representada pelo termo Ωb . Por definição,

$$b = 2i a_1(\underline{v}_m, \bar{\underline{v}}_m) = 2i \langle \rho h \sum \underline{v}_m, \bar{\underline{v}}_m \rangle ,$$

$$\therefore b = 2 \langle \rho h \sum \text{Re}(\underline{v}_m), I_m(\underline{v}_m) \rangle , \quad (4.54)$$

portanto b é real, o que permite concluir que a aceleração de Coriolis provoca uma bifurcação no espectro de frequências da casca estacionária, dando origem às frequências $\omega_m^{(1)}$ e $\omega_m^{(2)}$, correspondentes a ondas móveis circunferenciais: no mesmo sentido e em sentido oposto à rotação.

2) Influência da aceleração centrífuga

Esta influência é caracterizada pelo termo $\Omega^2 a_2$. Considerando a definição de a_2 ,

$$a_2(\underline{v}_m, \bar{\underline{v}}_m) = \langle \rho h \sum^2 \underline{v}_m, \bar{\underline{v}}_m \rangle = - \langle \rho h \sum \underline{v}_m, \sum \bar{\underline{v}}_m \rangle , \quad (4.55)$$

conclui-se que a aceleração centrífuga tem efeito simétrico sobre as frequências, acarretando redução das frequências à medida que Ω cresce, em consequência de ser $a_2(\underline{v}_m, \bar{\underline{v}}_m)$ simétrico e negativo.

3) Influência do estado inicial gerado pelas forças centrífugas.

Considerando apenas as tensões iniciais geradas pelas forças centrífugas, tem-se

$$\eta_0(\underline{v}_m, \bar{\underline{v}}_m) = \langle \underline{B}_m \underline{N}_0, \bar{\underline{B}}_m \rangle , \quad (4.56)$$

e neste caso N_0 resume-se às componentes N_{11}^0 e N_{22}^0 , portanto o estado inicial gerado pelas forças centrífugas, representadas pela componente a_0 da aceleração absoluta, tem efeito também simétrico sobre as frequências. Entretanto, o funcional η_0 associado pode ser positivo ou negativo, dependendo da forma da casca e das condições de contorno. Por exemplo, no caso de cascas cilíndricas, as tensões iniciais, geradas pela componente a_0 da aceleração centrífuga, são de tração, o que implica em η_0 positivo, e portanto tende a aumentar as frequências à medida que Ω cresce. Já no caso de placas circulares com furo central estas tensões iniciais podem ser de tração ou compressão conforme o apoio na direção radial, seja na borda interna ou externa.

4) Influência do torque inicial

O funcional η_0 associado a torque inicial ($N_{12}^0 = N_{21}^0$), é indefinido, isto é, pode ser positivo ou negativo, portanto a presença de torque, no estado inicial, gera bifurcação no espectro de frequências, independente dos efeitos da rotação, [6], [7], [8].

As referências [6], [7] e [8] admitem ainda bifurcações geradas por anisotropia material, ou anisotropia gerada por anéis de enrijecimento.

4.5.2. Estabilidade de Equilíbrio

O estudo de estados iniciais críticos (flambagem) ou de velocidades de rotação críticas é feito através do problema de autovalor,

$$\Omega^2 a_2(\underline{v}_m, \hat{\underline{v}}_{-m}) + \mathcal{L}(\underline{v}_m, \hat{\underline{v}}_{-m}) + \eta_0(\underline{v}_m, \hat{\underline{v}}_{-m}) = 0, \quad (4.57)$$

obtido de (4.51) com $\omega_m = 0$. O autovalor pode ser um parâmetro de carga relativo ao estado inicial ou à velocidade de rotação Ω , neste caso deve-se lembrar que η_0 também é função de Ω , em consequência do estado inicial gerado pela rotação.

A existência de velocidades de rotação críticas irá de

pender da forma da casca e das condições de contorno, conforme comentário anterior. (item b.3)

No caso de torques iniciais, como o funcional η_0 associado é indefinido, ocorre bifurcação no espectro de frequências e existem sempre valores críticos para o torque.

4.5.3. Resposta linear em regime

a) Carregamento de intensidade constante

Substituindo a solução periódica (4.32) em (4.42), obtem-se o conjunto de equações lineares,

$$\begin{aligned} \varepsilon(\underline{u}_m^*, \hat{\underline{u}}_{-m}) + \eta_0(\underline{u}_m^*, \hat{\underline{u}}_{-m}) - m^2 \Omega^2 \alpha_0(\underline{u}_m^*, \hat{\underline{u}}_{-m}) - \\ - 2im\Omega^2 \alpha_1(\underline{u}_m^*, \hat{\underline{u}}_{-m}) + \Omega^2 \alpha_2(\underline{u}_m^*, \hat{\underline{u}}_{-m}) = j_m(\hat{\underline{u}}_{-m}), \end{aligned}$$

$$\text{para } m = -M, \dots, M \quad (4.58)$$

Uma aproximação de elementos finitos de (4.58), é representada por,

$$[K_m + G_m - \Omega^2(m^2 \tilde{M} + 2im\tilde{C} - \tilde{G})] \underline{U}_m^* = \underline{J}_m,$$

$$\text{para } m = -M, \dots, M. \quad (4.59)$$

A solução de (4.59) fornece a aproximação de elementos finitos para as amplitudes dos deslocamentos correspondentes à resposta linear em regime permanente.

Estudos realizados anteriormente, nesta área, visaram principalmente a determinação dos espectros de frequências e modos normais de vibração de rotores de turbinas. Uma única bibliografia [3], foi encontrada sobre estudo dinâmico de moinhos de bolas. Trata-se de um estudo experimental em modelos reduzidos, objetivando a determinação dos efeitos da rotação sobre a resposta do protótipo. Os principais resultados desta análise, foram resumidos pelos autores nas seguintes conclusões:

- "Os testes dinâmicos realizados nos modelos com bai

xas velocidades periféricas mostraram efeitos dinâmicos insignificantes, mesmo com um modelo tendo uma velocidade periférica da mesma ordem encontrada no protótipo".

- "Mas os resultados destes testes devem ser vistos com precaução, pois a simulação dos impactos causados pelos materiais dentro do protótipo do moinho de bolas de maior diâmetro pode não ter sido atingida".

E finalizam dizendo da necessidade de maiores estudos sobre o protótipo para se saber sobre que condições as conclusões obtidas com os modelos podem ser usadas em projeto.

O modelo mecânico adotado no presente trabalho não considera impactos do carregamento sobre a casca, mas apenas as excitações dinâmicas geradas por um carregamento de intensidade constante (carregamento estático) sobre a casca em movimento de rotação. Pela análise das equações (4.42), (4.58) e (4.59) conclui-se que a resposta dinâmica da casca, prevista por este modelo, depende fundamentalmente da relação entre as frequências das excitações ($m\Omega$) e as frequências naturais da casca em rotação (ω_m). A figura 4.2, apresenta um diagrama típico de confronto entre as frequências da excitação e as três mais baixas frequências dos primeiros harmônicos. Através deste diagrama pode-se saber "a priori" quais os harmônicos predominantes na resposta em regime, além de se ter uma idéia de possíveis ressonâncias.

b) *Carregamento de intensidade periódica*

A consideração de impactos do carregamento sobre a casca é um problema complexo e de difícil modelagem, pois não existe uma lei de comportamento bem definida para o material, que constitui o carregamento do moinho (minério + bolas de aço). Realmente, não se pode discordar de [3], quanto à necessidade de mais estudos sobre o protótipo.

Apenas para se ter uma idéia de prováveis excitações, geradas pelos choques entre o conteúdo e o casco do moinho, es

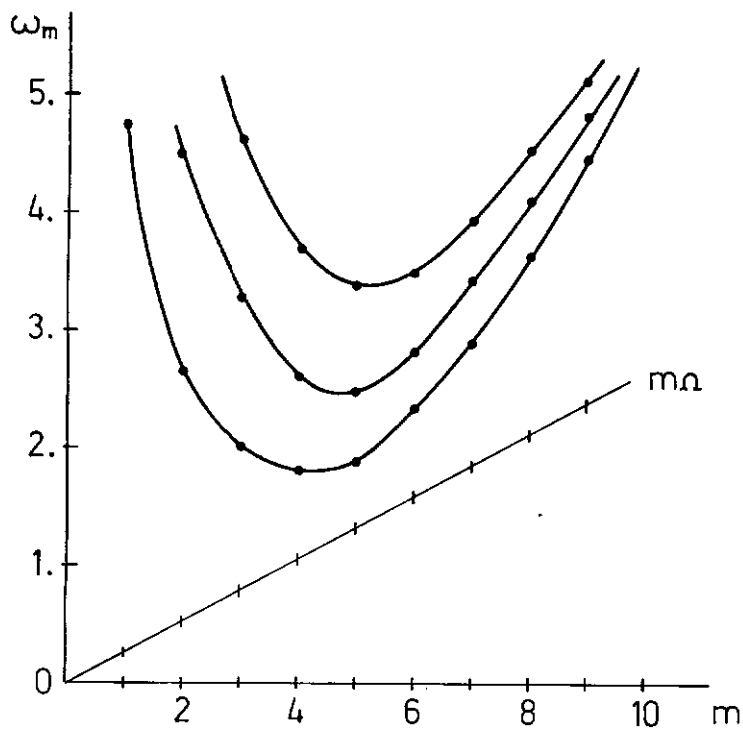


Fig. 4.2. - Excitações geradas pelo carregamento estático e frequências naturais.

tuda-se o caso ideal, em que a intensidade do carregamento é periódica no tempo, ou seja,

$$\underline{p}(s, \eta, t) = \underline{p}(s, \eta, t + T), \quad (4.60)$$

onde $T = 2\pi/\beta$ é o período, e β é a frequência das oscilações de intensidade de \underline{p} .

Por ser periódico no tempo, \underline{p} pode ser aproximado por,

$$\underline{p}(s, \eta, t) \approx \sum_{\ell=-L}^L \underline{p}_{\ell}(s, \eta) e^{i\ell\beta t}, \quad (4.61)$$

onde

$$\underline{p}_{\ell}(s, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^T \underline{p}(s, \eta, t) e^{-i\ell\beta t} dt, \quad (4.62)$$

L é um inteiro suficientemente grande, correspondente ao trun-

camento da série.

Considerando a mudança de variável (4.5), e o desenvolvimento em série na direção circunferencial, tem-se

$$\tilde{p}(s, \theta, t) \approx \sum_{m=-M}^M \sum_{\ell=-L}^L \tilde{p}_{m\ell}(s) e^{im\theta} e^{-i(m\Omega + \ell\beta)t}. \quad (4.63)$$

Portanto, neste caso, cada harmônico m é excitado por frequências:

$$(m\Omega + \ell\beta), \text{ com } \ell = -L, \dots, L, \quad (4.64)$$

o que pode implicar em respostas bastante diferentes daquela correspondente ao carregamento de intensidade constante, dependendo do novo confronto entre as frequências naturais ω_m e as frequências das excitações $m\Omega + \ell\beta$, conforme mostrado na figura 4.3.

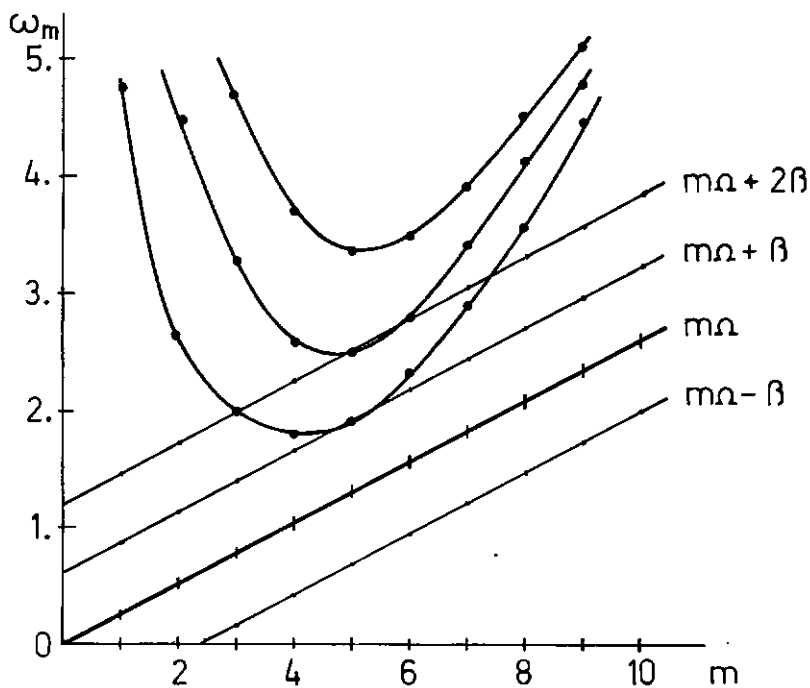


Fig. 4.3. - Excitações geradas pelo carregamento periódico e frequências naturais.

4.5.4. Ressonância simples

Ressonância simples ocorre sempre que alguma das frequências da excitação for igual a uma das frequências naturais do sistema.

Para o caso de carregamento estático a condição de ressonância é traduzida por

$$\omega_m = -m \Omega, \text{ para } m = -M, \dots, M. \quad (4.65)$$

As velocidades de rotação correspondentes à ressonância são determinadas, aproximadamente, pelo problema de autovalor algébrico, em Ω ,

$$\left[\tilde{K}_m + \tilde{G}_m - \Omega^2 (m^2 \tilde{M} + 2im \tilde{C} - \tilde{G}) \right] \tilde{V}_m = 0,$$

$$\text{para } m = -M, \dots, M, \quad (4.66)$$

resultante da substituição de (4.65) em (4.46). Deve-se lembrar que \tilde{G}_m é também função de Ω , quando se considera o estado inicial devido às forças centrífugas.

No caso do carregamento de intensidade periódica no tempo, a condição de ressonância é

$$\omega_m = -(m \Omega + \ell \beta), \text{ para } \ell = -L, \dots, L, m = -M, \dots, M, \quad (4.67)$$

e as velocidades de rotação correspondentes à ressonância são determinadas pelo problema de autovalor algébrico,

$$\left[\tilde{K}_m + \tilde{G}_m - \ell^2 \beta^2 \tilde{M} - \Omega (2m \ell \beta \tilde{M} - 2i \ell \beta \tilde{C}) - \Omega^2 (m^2 \tilde{M} + 2im \tilde{C} - \tilde{G}) \right] \tilde{V}_m = 0$$

$$\text{para } \ell = -L, \dots, L \text{ e } m = -M, \dots, M. \quad (4.68)$$

Portanto, a probabilidade de ocorrer ressonância simples cresce quando o carregamento tem intensidade periódica no tempo. Esta conclusão pode ser obtida diretamente do diagrama da figura 4.3.

4.6. Consideração da massa do carregamento

Para estudar a influência da massa do carregamento sobre a resposta dinâmica da casca, admitiu-se um modelo bastante simplificado, no qual se supõe que a massa está sempre em contato com a casca mas não acompanha o movimento de rotação rígida da mesma.

Deste modo, o trabalho virtual das forças de inércia associadas ao carregamento é,

$$\hat{I} = - \int_{L_1}^{L_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \mu(s, \eta) \ddot{u}(s, \eta, t) \cdot \hat{u}(s, \eta, t) R_0 d\eta ds, \quad (4.69)$$

onde $\mu(s, \eta)$ é a densidade de massa do carregamento por unidade de área da superfície média da casca.

Considerando a transformação de coordenadas (4.5) e a expansão em série de Fourier (4.9), tem-se,

$$\tilde{u}(s, \eta, t) = \sum_{m=-M}^M \tilde{u}_m(s, t) e^{im(\eta + \Omega t)}, \quad (4.70)$$

e admitido Ω constante, obtém-se

$$\ddot{\tilde{u}}(s, \eta, t) = \sum_{m=-M}^M (\ddot{\tilde{u}}_m + 2im\Omega \dot{\tilde{u}}_m - m^2\Omega^2 \tilde{u}_m) e^{im(\eta + \Omega t)}, \quad (4.71)$$

resultando assim,

$$\hat{I} = \sum_{m=-M}^M \hat{I}_m, \quad (4.72)$$

onde,

$$\hat{I}_m = - \sum_{\ell=-M}^M \int_{L_1}^{L_2} \gamma(\ell, m) e^{i(\ell-m)\Omega t} (\ddot{\tilde{u}}_\ell + 2i\ell\Omega \dot{\tilde{u}}_\ell - \ell^2\Omega^2 \tilde{u}_\ell) \cdot \hat{u}_{-m} R_0 ds, \quad (4.73)$$

com

$$\gamma(\ell, m) = \bar{\gamma}(m, \ell) = \int_{\eta_1}^{\eta_2} e^{i(\ell-m)\eta} \mu(s, \eta) d\eta. \quad (4.74)$$

Incluindo a influência da massa do carregamento em (4.14) com $\dot{\Omega} = 0$, resulta

$$\begin{aligned}
& \langle \rho h(\ddot{u}_m + 2\Omega Z \dot{u}_m + \Omega^2 Z^2 u_m), \hat{u}_{-m} \rangle + \mathcal{E}(u_m, \hat{u}_{-m}) + \\
& + \sum_{\ell=-M}^M \int_{L_1}^{L_2} \gamma(m, \ell) e^{i(\ell-m)\Omega t} (\ddot{u}_\ell + 2i\ell\Omega \dot{u}_\ell - \ell^2 \Omega^2 u_\ell) \cdot \hat{u}_{-m} R_0 \, ds + \\
& + \sum_{\ell=-M}^M \left\{ \frac{1}{2} \langle D B_{m-\ell}^T B_\ell, \hat{A}_{-m} \rangle + \langle B_{m-\ell} N_\ell, \hat{B}_{-m} \rangle \right\} = j_m(\hat{u}_{-m}) e^{-im\Omega t},
\end{aligned}$$

para $m = -M, \dots, M$.

(4.75)

Verifica-se, então que a consideração da massa de carregamento resultou num problema de vibrações não autônomas e, assim como a não linearidade, acarreta também acoplamento entre diferentes harmônicos.

Resposta transiente de (4.75), pode ser obtida, usando o procedimento de integração numérica apresentado na seção 4.3. Com relação a resposta em regime demonstra-se que a massa do carregamento não tem influência sobre esta solução, para tanto basta substituir (4.32) em (4.75) que os termos relativos a massa do carregamento anulam-se identicamente. A principal influência da massa do carregamento é sobre a estabilidade da solução periódica, conforme será visto no capítulo V.

4.7. Aplicações Numéricas

4.7.1. Aproximação de elemento finito

Para obtenção da aproximação de elementos finitos, utilizou-se um elemento tronco-cônico com dois nós e seis graus de liberdade por nó, figura 4.4.

Dentro de um elemento genérico (e), os deslocamentos do harmônico m são aproximados por:

$$u_m^{(e)} \approx u_m^{h(e)} = \sum_{j=1}^{12} \phi_j^{(e)}(s) (U_m^{(e)})_j, \quad (4.78)$$

onde $(U_m^{(e)})_j$, $j = 1, \dots, 12$, são os deslocamentos nodais do elemento (e), relativos ao harmônico m. Os vetores $\phi_j^{(e)}(s)$ são

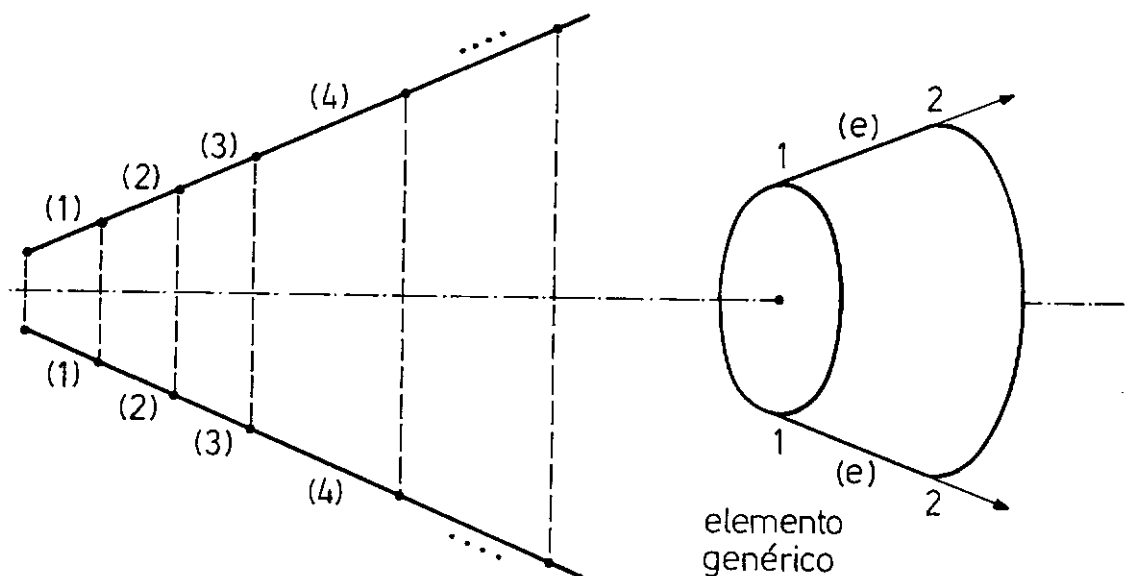


Figura 4.4 - Discretização de elementos finitos.

dados por:

$$\phi_{3\ell-2}^{(e)} = (\phi_{\ell}^{(e)}, 0, 0)^T;$$

$$\phi_{3\ell-1}^{(e)} = (0, \phi_{\ell}^{(e)}, 0)^T;$$

$$\phi_{3\ell}^{(e)} = (0, 0, \phi_{\ell}^{(e)})^T; \quad (4.79a-c)$$

sendo $\phi_{\ell}^{(e)} = \phi_{\ell}^{(e)}(s)$, $\ell = 1, 2, 3, 4$, os polinômios cúbicos de Hermite. As funções de interpolação $\phi_{\ell}^{(e)}$ são polinômios reais, enquanto que os parâmetros nodais $(U_m^{(e)})_j$, são números complexos.

A aproximação global de u_m pode ser obtida a partir da interpolação local, de acordo com o procedimento padrão do método dos elementos finitos. Formalmente, pode-se escrever:

$$u_m \approx u_m^h = \sum_{k=1}^G \phi_k(U_m)_k, \quad (4.80)$$

onde G é o número de graus de liberdade da discretização de elementos finitos, ϕ_k são as interpolantes globais e $(U_m)_k$ são os parâmetros nodais relativos ao harmônico m .

Apresenta-se, a seguir, um quadro das matrizes e vetores resultantes das aproximações de elementos finitos usadas neste capítulo, indicando-se, ao lado, as equações que deram origem a estas aproximações:

$$M_{ij} = M_{ji} = \alpha_0(\phi_j, \phi_i) \dots \dots \dots (4.23a)$$

$$C_{ij} = -C_{ji} = \alpha_1(\phi_j, \phi_i) \dots \dots \dots (4.23b)$$

$$G_{ij} = G_{ji} = \alpha_2(\phi_j, \phi_i) \dots \dots \dots (4.23c)$$

$$(K_m)_{ij} = (\bar{K}_m)_{ji} = \varepsilon(\phi_j, \phi_i) \dots \dots \dots (4.16)$$

$$K_{m(n)ij}^{(k)} = (\bar{K}_{m(n)})_{ji}^{(k)} = \varepsilon_0(\phi_j, \phi_i) \dots \dots \dots (4.37)$$

$$(G_m)_{ij} = (\bar{G}_m)_{ji} = \eta_0(\phi_j, \phi_i) \dots \dots \dots (4.43)$$

$$(F_m^{(n)})_i = f_m^{(n)}(\phi_i) \dots \dots \dots (4.24)$$

$$P_{m(n)i}^{(k)} = p_{m(n)}^{(k)}(\phi_i) \dots \dots \dots (4.38)$$

$$(J_m)_i = j_m(\phi_i) \dots \dots \dots (4.17)$$

Estas expressões são apenas formais, pois normalmente as matrizes e vetores globais são montados a partir das correspondentes matrizes e vetores dos elementos, de uma forma automática, sem a necessidade de se construir as funções de interpolação global.

A partir dos estudos apresentados foram elaborados programas automáticos visando o cálculo das soluções numéricas propostas. Alguns exemplos de aplicação destes programas são apresentados nas seções seguintes.

4.7.2. Exemplos de Vibrações Livres

Foi elaborado um programa automático de cálculo, em linguagem FORTRAN IV G (utilizando a aritmética complexa disponível neste compilador), visando o estudo das frequências e modos normais de vibração de cascas axissimétricas com movimento de rotação. Este programa consiste basicamente na montagem do problema de autovalor complexo (4.46), cuja solução é calculada, para Ω fixo, através da subrotina desenvolvida por Gupta [41].

Nos exemplos apresentados a seguir, procurou-se fazer um estudo numérico da convergência do modelo de elementos finitos proposto, e comprovar, numericamente, resultados obtidos neste capítulo quanto a influência da rotação sobre as frequências da casca.

a) Estudo da convergência dos autovalores

Em um trabalho anterior [42], usando os teoremas de aproximação apresentados por Strang e Fix [35], obteve-se a seguinte estimativa,

$$e^h = \frac{\lambda_\ell^h - \lambda_\ell}{\lambda_\ell} \leq C_1 h^4 \lambda_\ell, \quad (4.81)$$

para o erro (e^h) da aproximação de elementos finitos (λ_ℓ^h) dos autovalores (λ_ℓ) associados ao problema de vibrações livres de cascas cilíndricas. Onde $\lambda_\ell = \omega_{m\ell}^2$ é o ℓ -ésimo autovalor exato, correspondente ao harmônico m ; h é um parâmetro pequeno, que representa o diâmetro da malha e C é uma constante que independe de h . Esta estimativa diz respeito ao elemento utilizado neste trabalho, e ao problema de autovalor associado às vibrações livres da casca estacionária ($\Omega = 0$).

Para $\Omega \neq 0$, o erro de aproximação deve ser definido em termos de $\omega_{m\ell}$, ou seja

$$e^h = \frac{\omega_{m\ell}^h - \omega_{m\ell}}{\omega_{m\ell}} \leq C_2 h^4 \omega_{m\ell}, \quad (4.82)$$

já que neste caso o autovalor é a própria frequência $\omega_{m\ell}$. Para efeito de análise numérica o problema (4.46) deve ser colo-

cado na forma de um problema de autovalor linear. De acordo com os estudos gerais desenvolvidos nas referências [35] e [43] a estimativa (4.82) deve se verificar para valores de Ω a baixo do valor crítico, isto é, quando o operador associado ao problema de autovalor linear é positivo definido.

Visando a confirmação de (4.82) foram calculadas sucessivas aproximações de elementos finitos, correspondentes a 2, 4, 6, 8 e 10 elementos, para as frequências naturais de uma casca cilíndrica bi-engastada, com propriedades físicas e geométricas idênticas à apresentada na figura 4.12.

Os resultados deste estudo, para a mais baixa frequência dos três primeiros harmônicos ímpares, estão apresentados nas figuras 4.5 e 4.6 para $\Omega = 0$ e $\Omega = 50\text{rd/s}$, respectivamente.

Deve-se esperar que o gráfico $\log e^h \times \log h$ tenda a uma reta de coeficiente angular quatro à medida h diminui, uma vez que

$$\log e^h \leq \log C_2 + \log \omega_{m\ell} + 4 \log h. \quad (4.83)$$

Os gráficos 4.5 e 4.6 de fato confirmam esta expectativa, tanto para $\Omega = 0$ como para $\Omega = 50\text{rd/s}$. Além do erro da aproximação de elementos finitos existem os erros de truncamento e de aproximação no cálculo dos autovalores aproximados, por esta razão não se obtém exatamente o coeficiente angular quatro mesmo para h suficientemente pequeno.

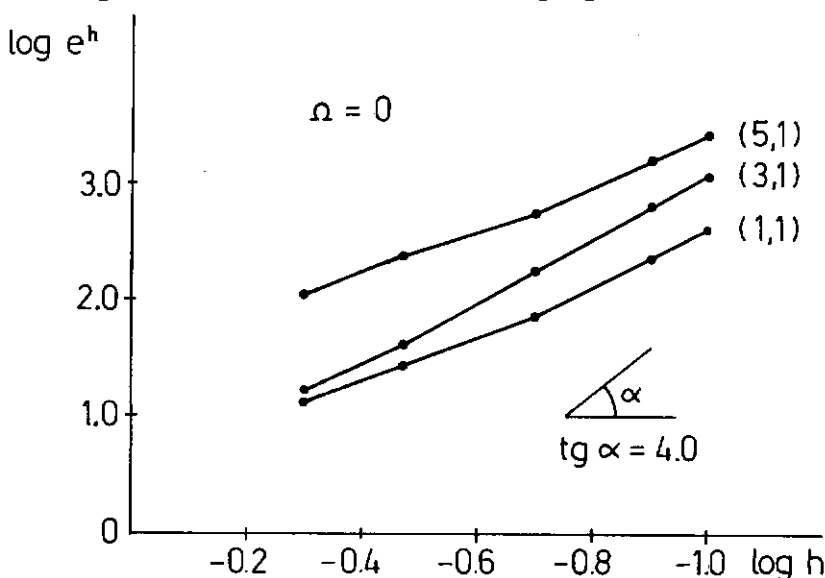


Fig. 4.5 - Taxa de convergência das frequências naturais ($\Omega=0$)

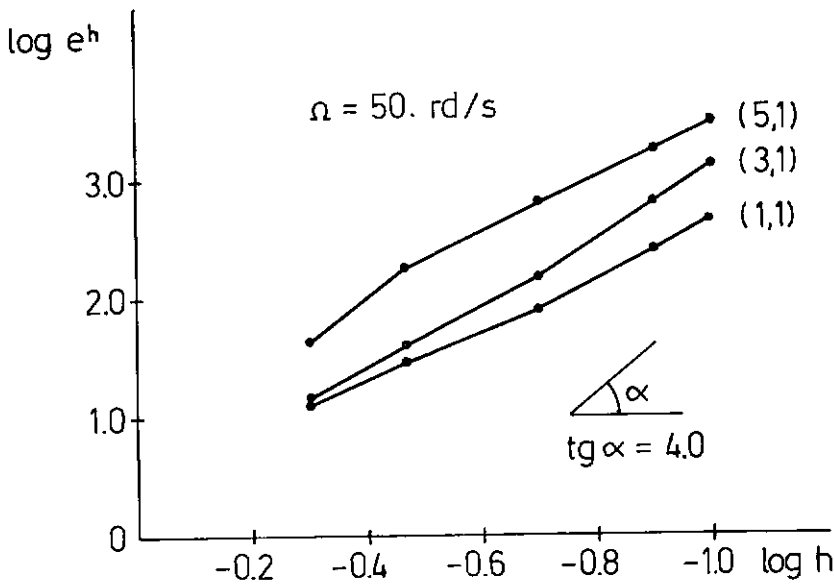


Fig. 4.6 - Taxa de convergência das frequências naturais de uma casca cilíndrica com movimento de rotação

b) Casca cilíndrica bi-apoiada - bifurcação no espectro de frequências

Para a mesma casca do exemplo anterior, porém apoiada nas extremidades, estudou-se a influência da rotação sobre o espectro de frequências.

A figura 4.7 apresenta um diagrama de espectros (todos estes espectros são discretos — as linhas contínuas visam apenas melhor visualização), correspondentes a mais baixa frequência dos primeiros harmônicos, para $\Omega = 0$ e $\Omega = \pm 50 \text{ rd/s}$ (o sinal negativo indica ondas móveis em sentido oposto à rotação). A influência da rotação sobre a mais baixa frequência do segundo harmônico (ω_{21}) está ilustrada na figura 4.8. Estes resultados confirmam a bifurcação do espectro de frequências provocada pela aceleração de Coriolis, e também o fato de que a velocidade das ondas móveis no sentido oposto à rotação ($\Omega < 0$) é maior do que a velocidade das ondas móveis no mesmo sentido da rotação ($\Omega > 0$).

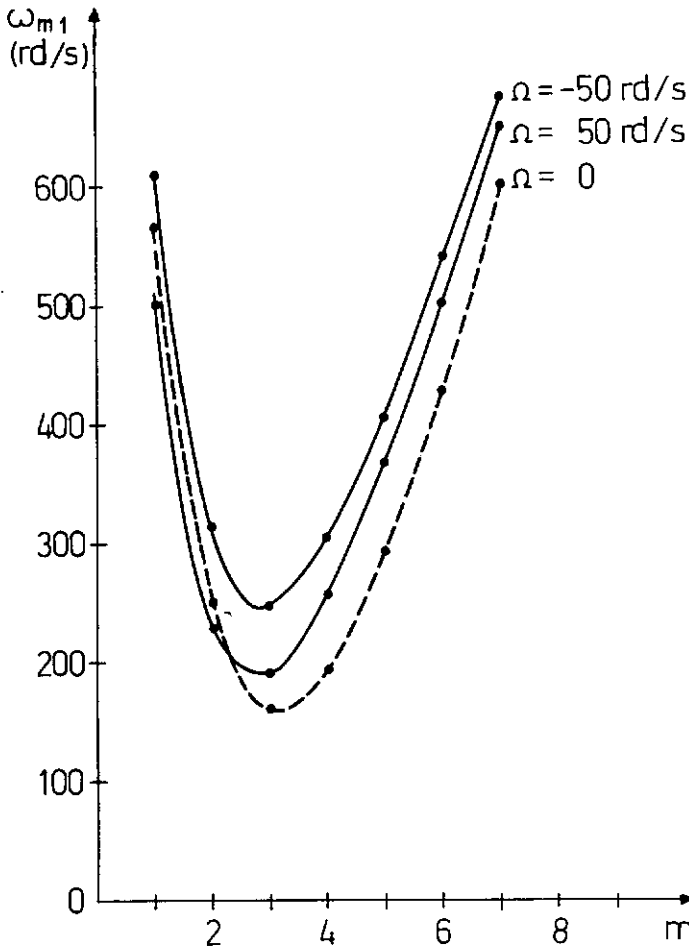


Fig. 4.7 - Influência da rotação no espectro de freqüências de uma casca cilíndrica bi-apoiada.

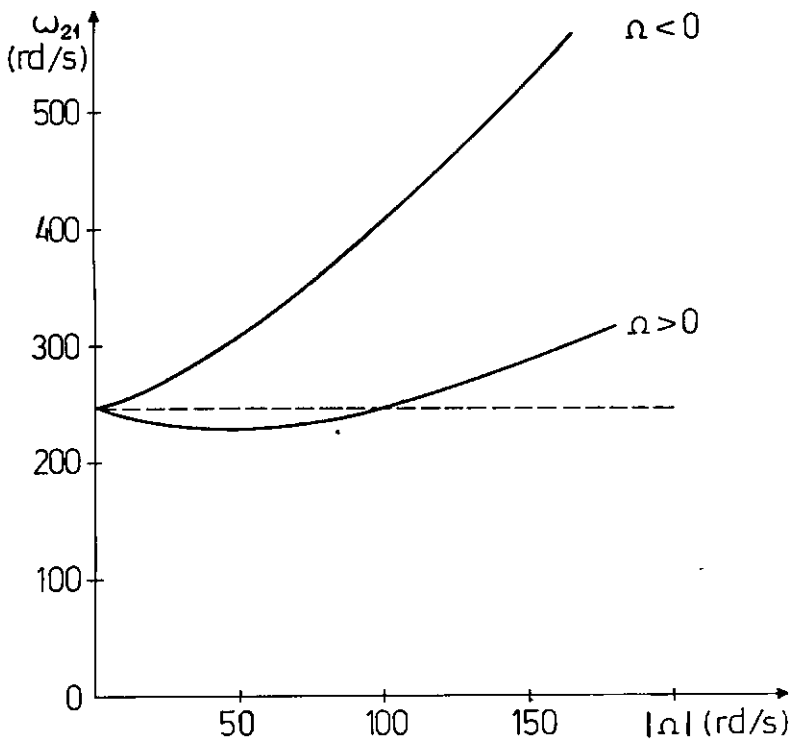


Fig. 4.8 - Variação das freqüências com a velocidade de rotação

c) Placa circular com furo central

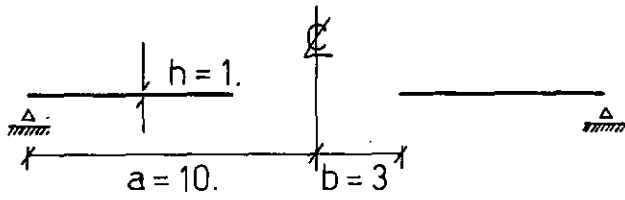
Neste caso as vibrações transversais e as vibrações no plano da placa são desacopladas (vibrações lineares). No que diz respeito a vibrações transversais, a influência da rotação Ω resume-se ao estado inicial gerado pelas forças centrífugas [44], [45]. No presente estudo considerou-se apenas o estado de tensões iniciais, pois as deformações iniciais não são significativas.

Foi analisada a influência deste estado de tensão inicial sobre as vibrações transversais da placa apresentada na figura 4.9, para duas diferentes condições de apoio do anel circunferencial externo:

- 1) apoio simples (direção transversal apenas)
- 2) apoio fixo (direções transversal e radial).

Nesta análise foram utilizados apenas três elementos, tendo o elemento mais central 3 unidades de comprimento e os demais 2 unidades. Os diagramas dos esforços longitudinais (N_{11}) e circunferenciais (N_{22}) gerados por uma rotação unitária, nos dois casos de apoio considerados, estão mostrados na figura 4.10. Observa-se que estes esforços são sempre de tração (sinal positivo), quando o apoio circunferencial externo é livre na direção radial, e surgem esforços de compressão, principalmente na direção radial (N_{11}), quando este apoio é fixo radialmente. Isto explica porque a rotação tem efeitos qualitativamente diferentes sobre as frequências naturais da placa circular, em função das condições de apoio, conforme está ilustrado na figura 4.11, para a frequência de vibração do primeiro modo axissimétrico (ω_{01}). Verifica-se que, no caso do apoio livre, o crescimento da velocidade de rotação implica em aumento das frequências de vibração da placa, ou seja torna a estrutura mais rígida, enquanto que no caso do apoio fixo na direção radial, o contrário ocorre, chegando inclusive a instabilizar por flambagem da placa (frequência nula). Observa-se, ainda, que não ocorre bifurcação no espectro de frequências das vibrações transversais, pois a aceleração de Coriolis não influ

encia as vibrações transversais.



$$E = 1; \nu = 0.3; \rho = 1.$$

Fig. 4.9 - Placa circular com furo central

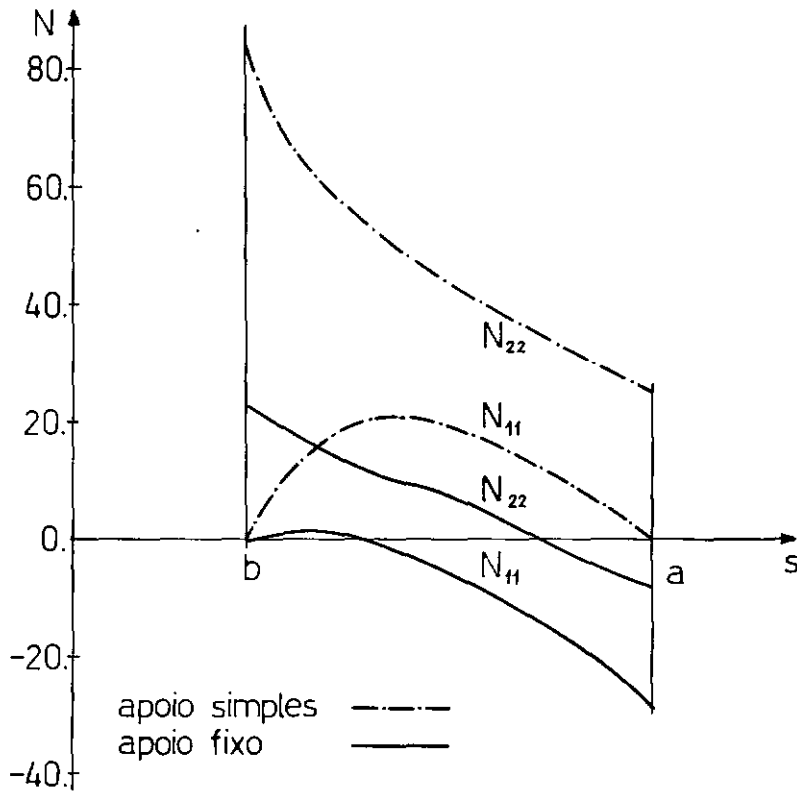


Fig. 4.10 - Esforços circunferenciais e esforços radiais gerados por uma rotação unitária.

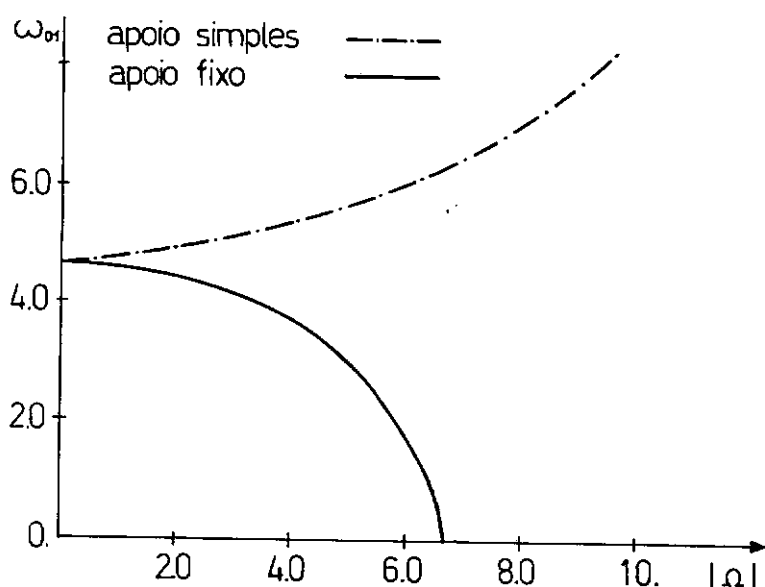


Fig. 4.11 - Variação da frequência fundamental com a velocidade de rotação.

4.7.3. Resposta estática e dinâmica

Usando programas elaborados para este fim, calculou-se a resposta de uma casca cilíndrica bi-apoiada, girando com diferentes velocidades de rotação, e sujeita a uma pressão interna, $p = 10 \text{ kgf/cm}^2$, uniformemente distribuída numa região da superfície média limitada por um ângulo central de 170° , figura 4.12. A aproximação, correspondente aos 8 primeiros harmônicos da série de Fourier, para a função carregamento considerada está mostrada na figura 4.13.

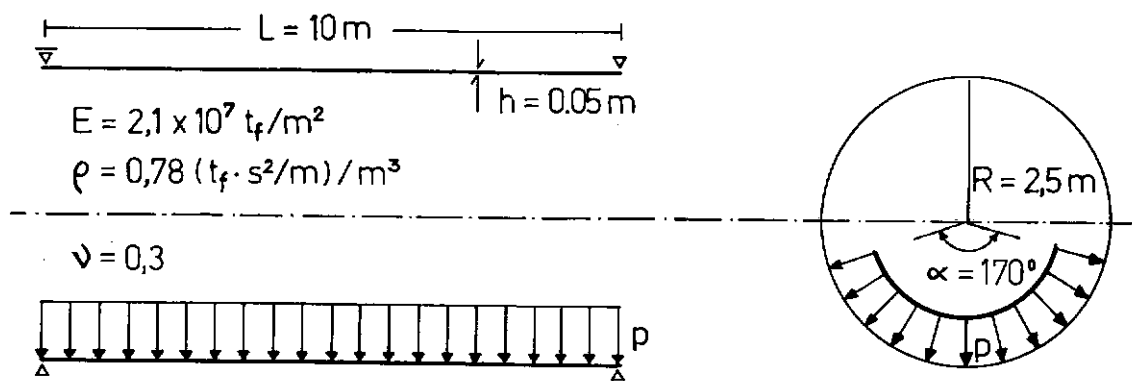


Fig. 4.12 - Casca cilíndrica bi-apoiada com pressão interna.

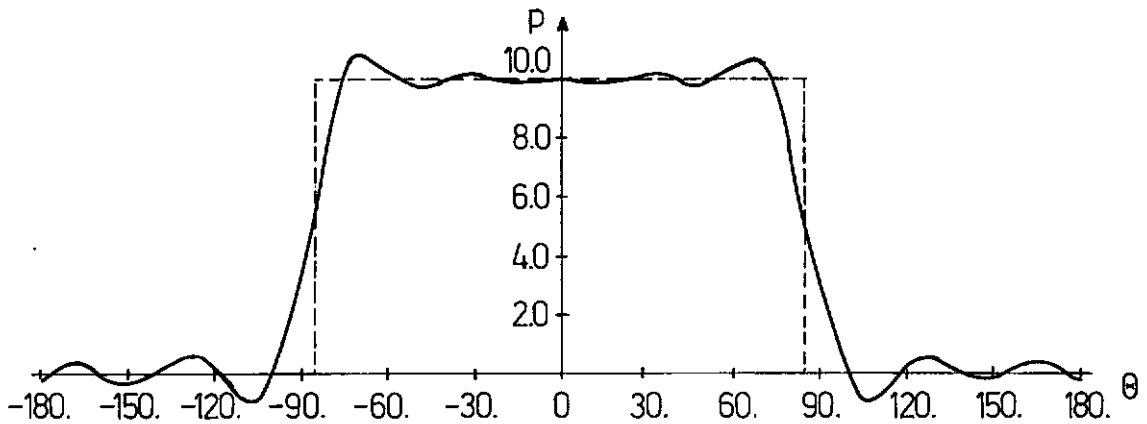


Fig. 4.13 - Aproximação de Fourier da função carregamento, correspondente aos 8 primeiros harmônicos.

De acordo com o modelo proposto no presente trabalho, admite-se que o carregamento não acompanha o movimento de rotação rígida da casca em torno de seu eixo longitudinal.

Os resultados apresentados, a seguir, visam principalmente a caracterização da influência da rotação sobre a resposta da casca em regime permanente, tanto para a análise linear quanto para a análise não linear (grandes deformações).

a) Comparação com uma solução exata

Tendo em vista o fato bem conhecido de que próximo aos apoios ocorrem grandes variações dos esforços e momentos resultantes, devidas à chamada perturbação de borda, analisou-se o problema da resposta linear estática da casca cilíndrica em estudo, sujeita a uma pressão interna axissimétrica, visando a definição de uma malha de elementos finitos precisa para o estudo do problema. A solução exata deste problema foi calculada usando o programa desenvolvido na referência [46].

A malha de elementos finitos utilizada neste exemplo, e que será mantida nos exemplos seguintes, faz uso da simetria em relação à seção transversal média da casca, e é constituída

por 14 elementos (numerados a partir do apoio), com os seguintes comprimentos:

elementos 1, 2(0.05m); 3, 4, 5, 6, 7 (0.10m); 8, 9(0.20m) ;
10, 11(0.50m); 12, 13, 14 (1.0m).

Nas figuras 4.14 e 4.15 estão apresentadas as aproximações de elementos finitos obtidas com esta malha para o esforço circunferencial (N_{22}) e o momento longitudinal (M_{11}), respectivamente. O confronto destas aproximações com as correspondentes soluções exatas indicam uma boa concordância entre elas, inclusive próximo aos apoios, onde ocorrem perturbações de borda.

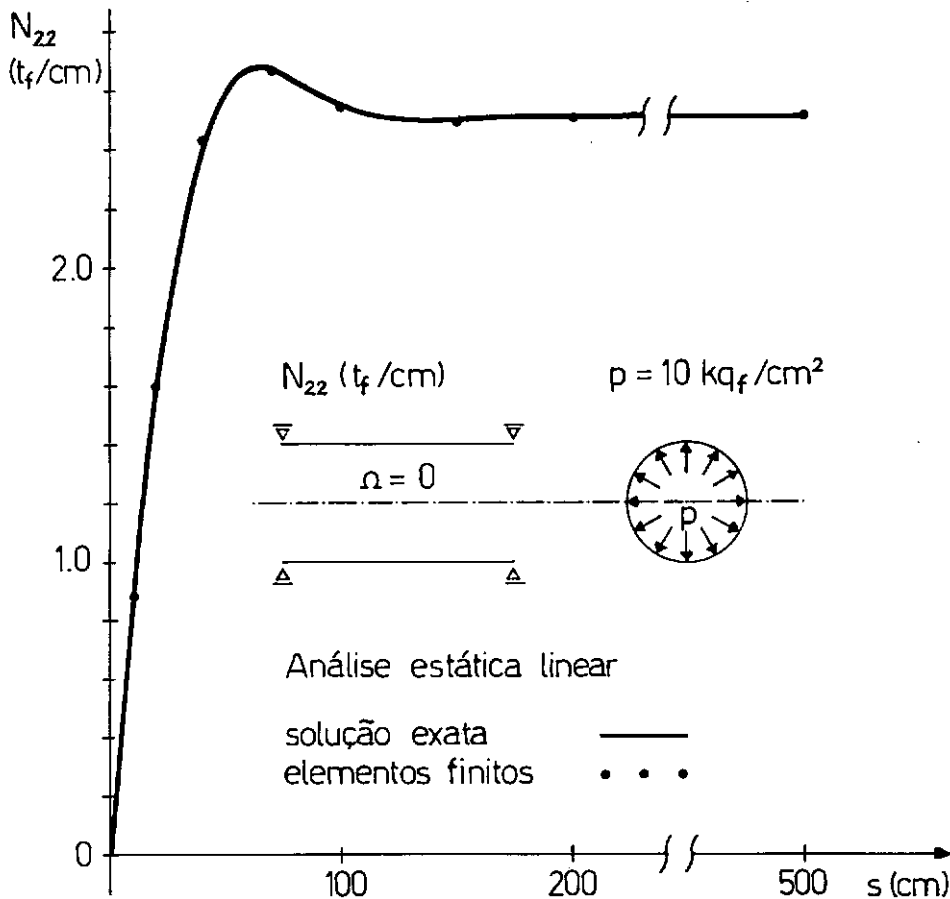


Fig. 4.14 - Diagrama do esforço circunferencial. Carregamento axissimétrico.

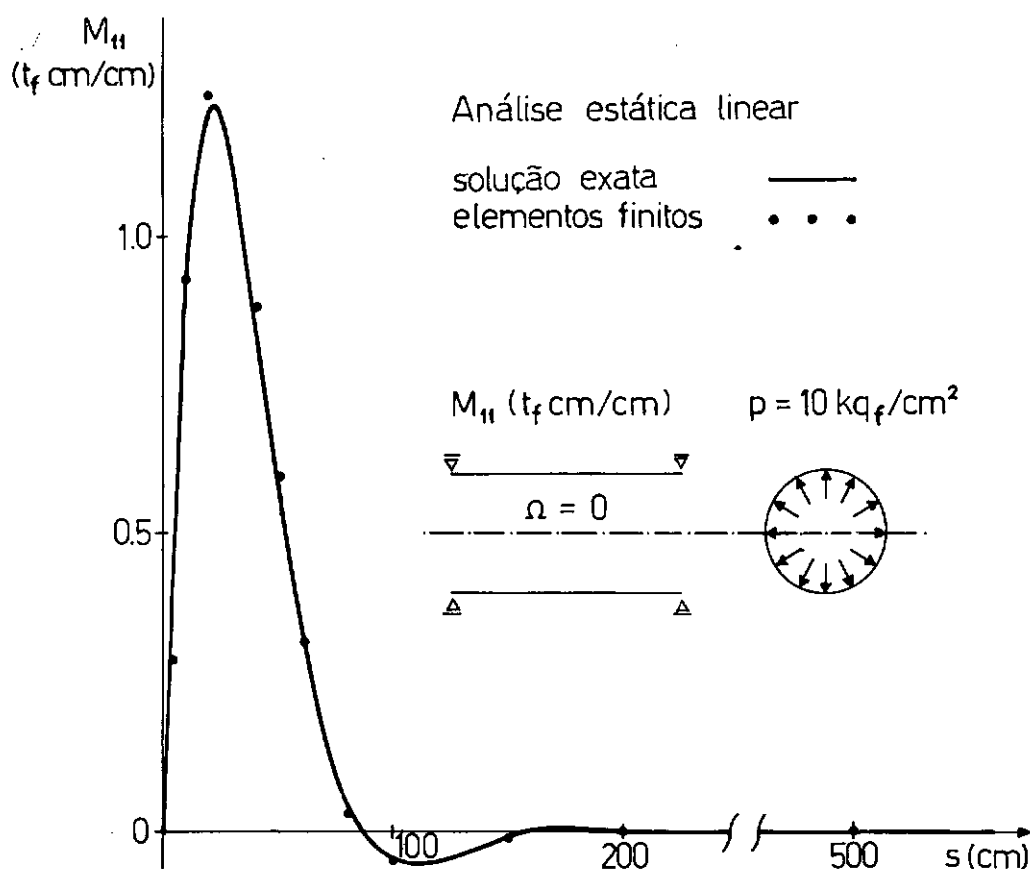


Fig. 4.15 - Diagrama do momento longitudinal.
Carregamento axissimétrico

b) Análise linear

Usando a mesma discretização de elementos finitos utilizada no exemplo anterior, calculou-se a solução em regime da casca cilíndrica apresentada na figura 4.12, para diferentes valores de Ω .

Os resultados apresentados na figura 4.17 dizem respeito a variação com θ dos deslocamentos radiais (u_r) da seção média da casca, para Ω igual a 0, 20, 30 e 50 rd/s. Este estudo evidencia a grande influência que pode ter a rotação na resposta dinâmica de cascas axissimétricas, sujeitas à ação de um carregamento do tipo considerado.

A figura 4.16 apresenta um confronto entre os espectros de frequências ($m\Omega$) das excitações, geradas pelos diferentes valores da velocidade de rotação, e os espectros dos oito

primeiros harmônicos, para $\Omega = 0$ e $\Omega = 50 \text{ rd/s}$. (Neste estudo desprezou-se o estado inicial devido à rotação). Este diagrama é importante pois permite avaliar previamente quais os harmônicos predominantes na resposta dinâmica. Observa-se que para $\Omega = 50 \text{ rd/s}$ as frequências das excitações estão acima das mais baixas frequências naturais dos harmônicos 3 e 4, o que explica a resposta qualitativamente diferente apresentada pela casca para esta velocidade.

Resultados semelhantes foram obtidos para os esforços longitudinais (N_{11}) da seção transversal média, conforme demonstra a figura 4.18.

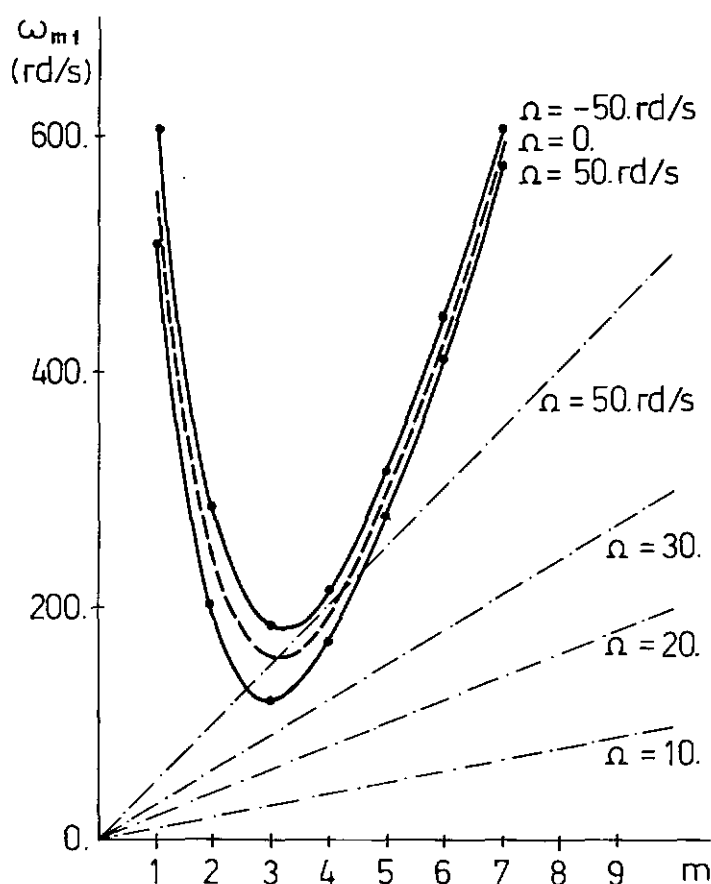


Fig. 4.16 - Confronto entre os espectros de excitações e os espectros de frequências naturais de uma casca cilíndrica bi-apoiada.

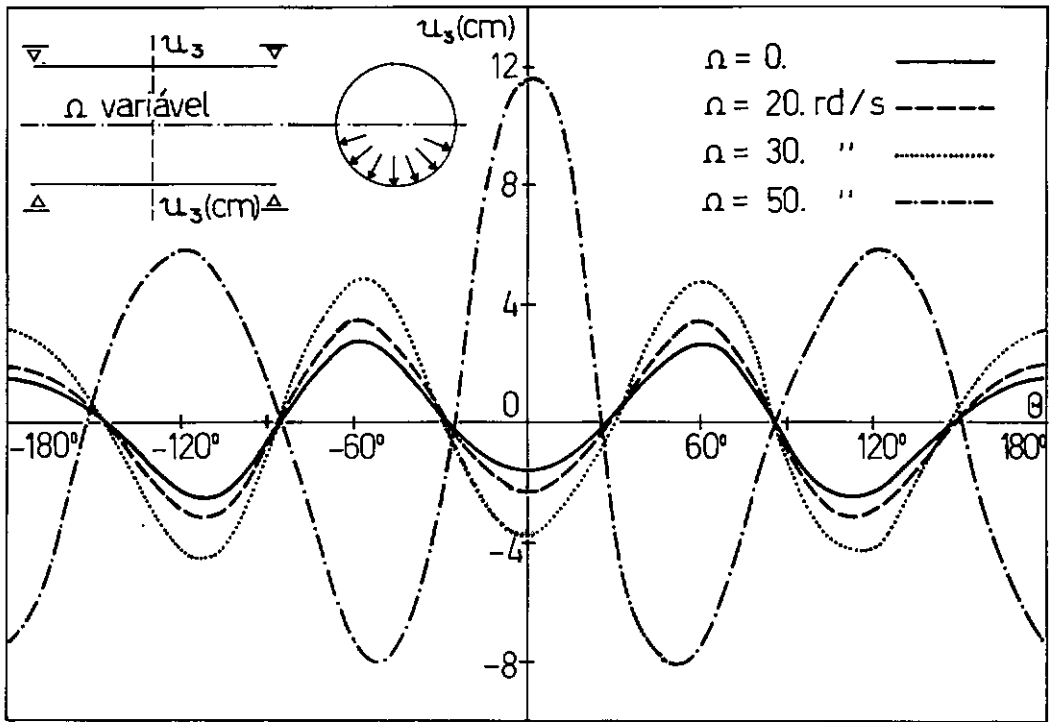


Fig. 4.17 - Deslocamentos radiais da seção transversal média .
Soluções periódicas lineares.

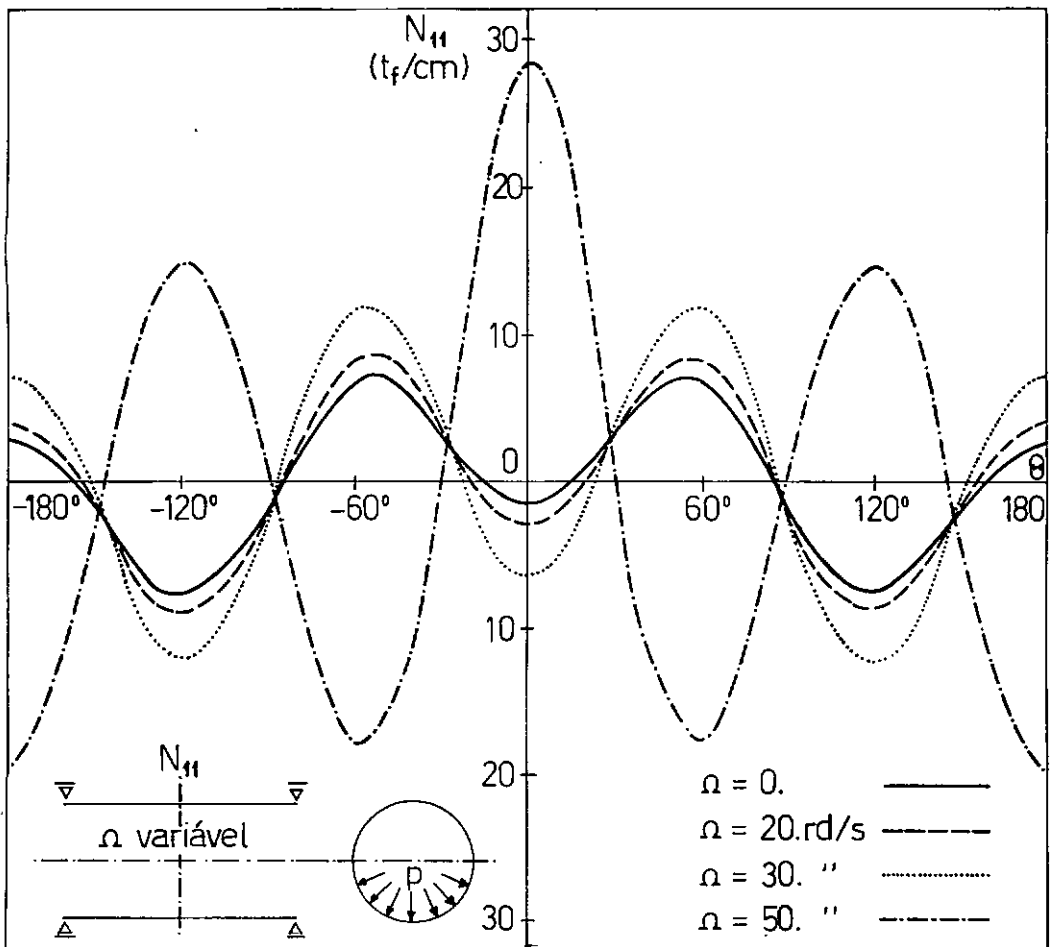


Fig. 4.18 - Esforços longitudinais na seção transversal média.

c) Análise não linear

O mesmo estudo do exemplo anterior foi realizado considerando os termos não lineares das deformações da superfície média. Nesta análise o carregamento foi dividido em dez incrementos iguais e o número máximo de iterações por incremento foi cinco.

Os resultados previstos pela análise não linear estática ($\Omega = 0$) para os deslocamentos radiais e para os esforços longitudinais da seção transversal média da casca, estão apresentados nas figuras 4.19 e 4.20, em comparação com as correspondentes soluções lineares.

Nas figuras 4.21 e 4.22 apresentam-se as soluções obtidas para as respostas não lineares dos esforços longitudinais e deslocamentos radiais, respectivamente, obtidos com $\Omega=20\text{rd/s}$ comparando-os também com as soluções lineares correspondentes.

Este estudo demonstra que, neste caso, a solução linear é conservativa, pois a consideração dos termos não lineares torna a casca mais rígida. Evidentemente que o cálculo da solução não linear é bastante mais demorado do que o cálculo da solução linear correspondente, não só por causa do processo incremental e das iterações necessárias à convergência, mas principalmente devido ao tempo consumido no cálculo do vetor dos termos independentes, que, como foi mostrado anteriormente, depende de todos os harmônicos considerados na análise.

Ainda com relação ao tempo de computação, outro aspecto desfavorável é que operações com números complexos são mais demoradas do que com números reais. Deve-se lembrar, entretanto, que a possível transformação desses problemas para a forma real, que possibilitaria o uso exclusivo da aritmética real, implicaria na duplicação do número de equações originalmente complexas.

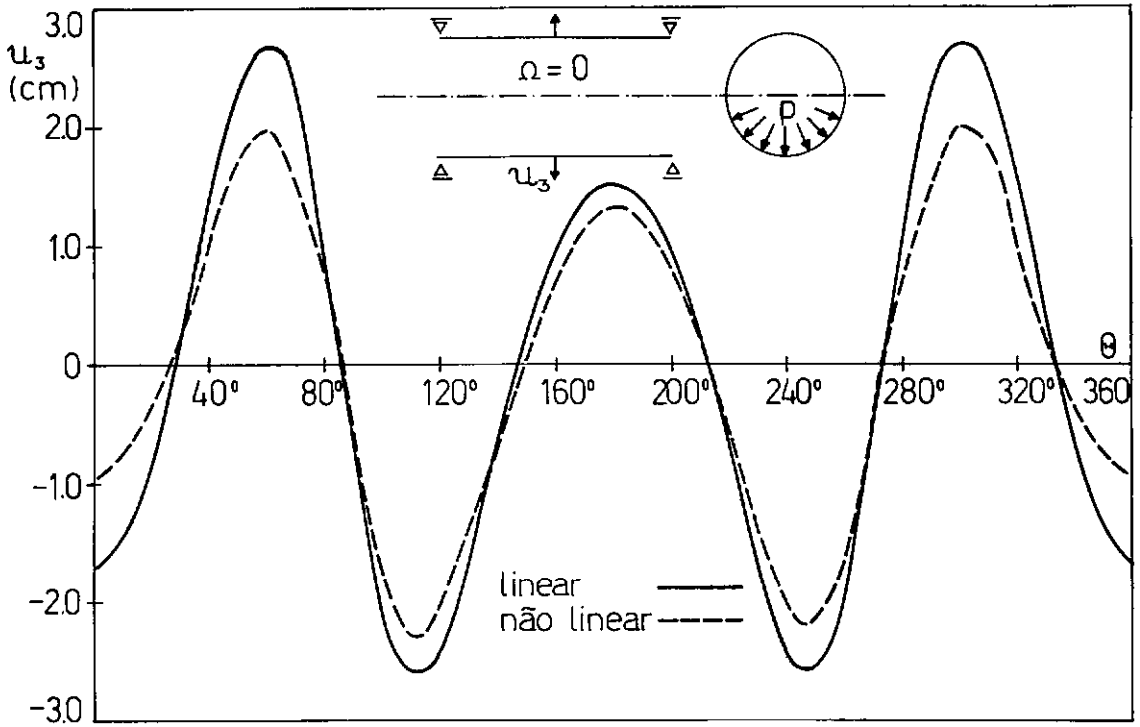


Fig. 4.19 - Deslocamentos radiais da seção transversal média.
Soluções estáticas linear e não linear.

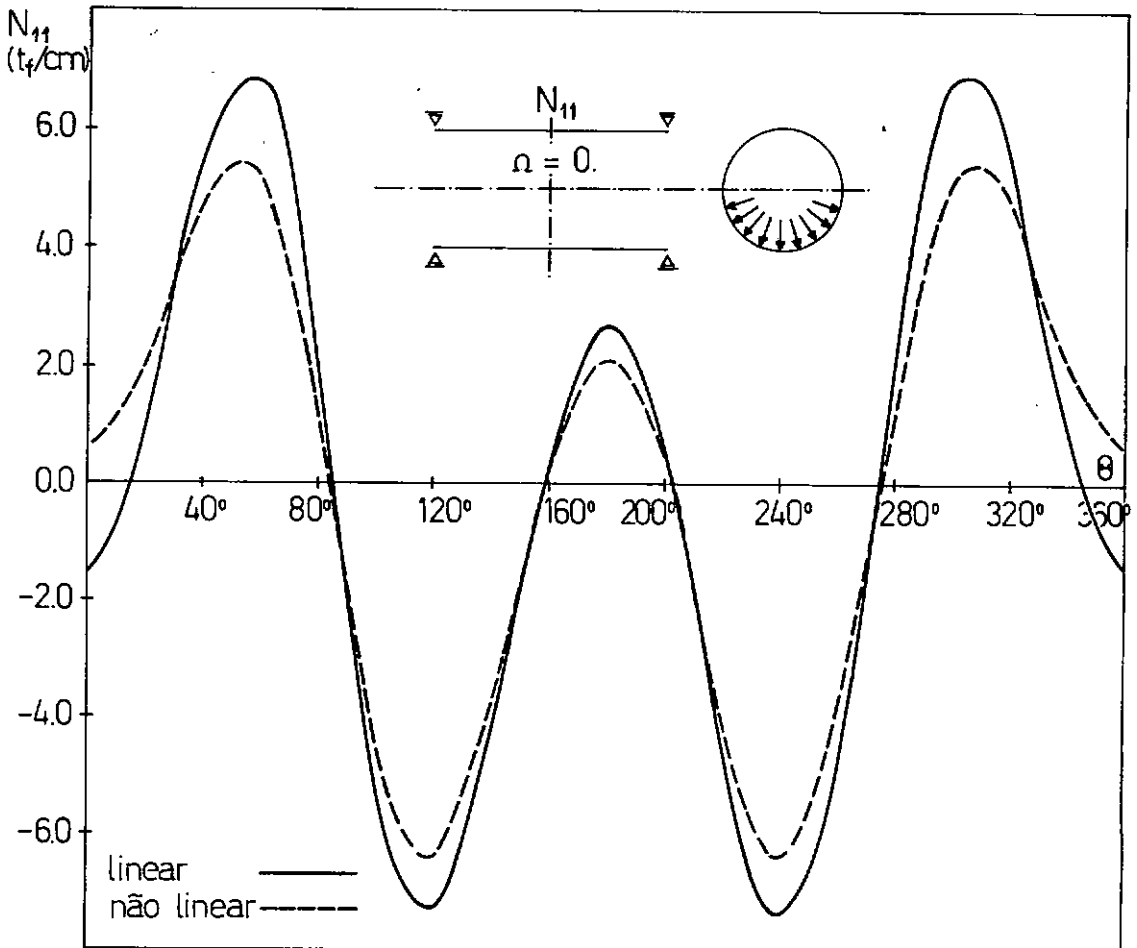


Fig. 4.20 - Esforços longitudinais na seção transversal média.
Soluções estáticas linear e não linear.

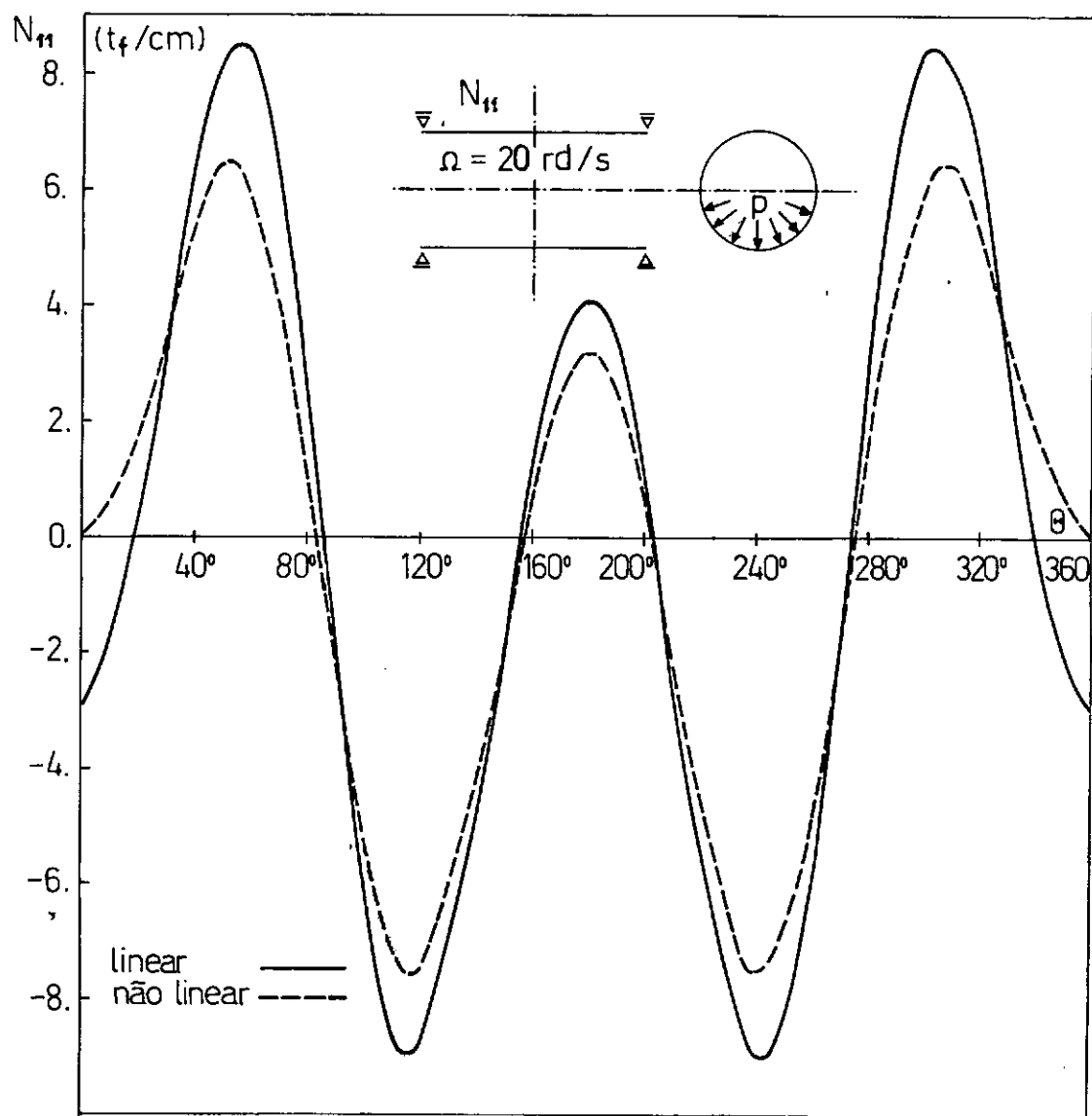


Fig. 4.21 - Esforços longitudinais na seção transversal média.
Soluções periódicas lineares e não lineares
($\Omega = 20 \text{ rd/s}$)

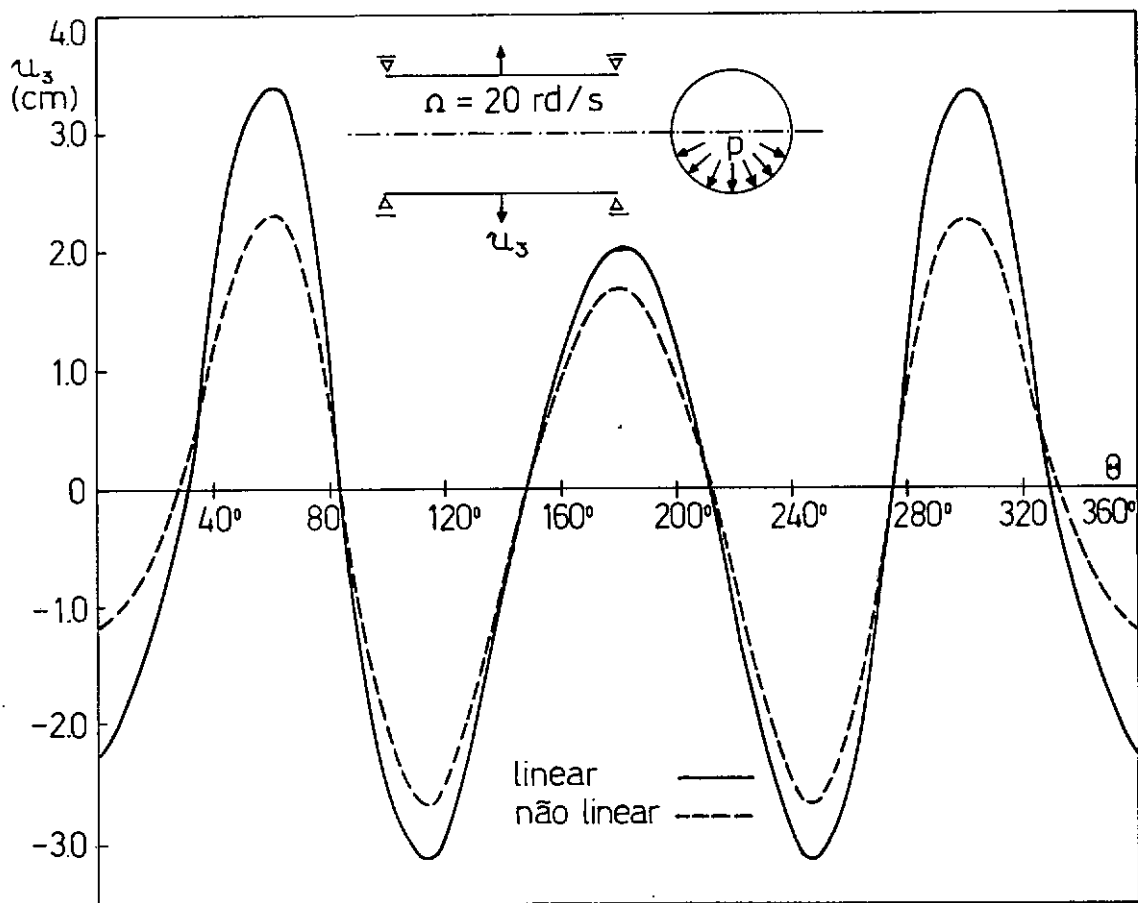


Fig. 4.22 - Deslocamentos radiais da seção transversal média.
Soluções periódicas linear e não linear ($\Omega=20 \text{ rad/s}$).

4.8. Conclusões

a) Mostrou-se que devido à rotação da casca, um carregamento estático, não axissimétrico, gera excitações periódicas, de frequências $m\Omega$, tornando evidente a condição de ressonância linear sempre que alguma das frequências naturais do harmônico m vier a coincidir com a frequência da excitação, isto é, quando $\omega_{m\ell} = m\Omega$.

b) A equação do movimento de cascas axissimétricas girando em torno do eixo longitudinal, e sujeitas a um carregamento que não acompanha o movimento de rotação rígida da casca, admite solução periódica, mesmo no caso de grandes deformações.

c) De acordo com o modelo proposto neste trabalho, a massa do carregamento considerado não tem influência sobre as amplitudes da solução periódica, mas tem influência significativa sobre a estabilidade desta solução, conforme se demonstra no capítulo V.

d) Com relação ao problema de vibrações autônomas lineares, foram demonstradas teoricamente algumas conclusões obtidas anteriormente nas referências [4-8], quanto a influência da velocidade de rotação e do estado inicial axissimétrico, sobre as frequências naturais e modos normais de vibração. Estas conclusões são, em resumo, as seguintes:

1) os modos normais de vibração de cascas axissimétricas com movimento de rotação são ondas móveis circunferencialmente: no mesmo sentido (*forward traveling waves*) e no sentido oposto à rotação (*backward traveling waves*);

2) a aceleração de Coriolis provoca uma bifurcação em relação ao espectro de frequências da casca estacionária, gerando os espectros correspondentes a ondas móveis no mesmo sentido e a ondas móveis no sentido oposto à rotação, sendo que estas têm sempre maior ve-

V. ESTABILIDADE PARAMÉTRICA DE CASCAS AXISSIMÉTRICAS

5.1. Introdução

Ressonância paramétrica ocorre em fenômenos descritos por equações diferenciais com coeficientes periódicos na variável independente. Na mecânica, este tipo de equação surge em sistemas cujas propriedades físicas (massa, rigidez ou amortecimento) variam periodicamente com o tempo, e também no estudo da estabilidade de soluções periódicas não lineares. Um exemplo bastante simples é encontrado na estabilidade dinâmica de vigas, sujeitas a forças longitudinais periódicas, onde, por extensão do problema de Euler, tem-se

$$K \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + (P_0 + \epsilon P_1(t)) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (5.1)$$

como equação variacional correspondente às vibrações transversais [47], [48]. P_0 independe do tempo e $P_1(t) = P_1(t + T)$ é periódico de período $T = 2\pi/\Omega$. K é a rigidez a flexão e μ a massa por unidade de comprimento da viga.

No caso de vigas simplesmente apoiadas os modos de flambagem coincidem com os modos normais de vibração,

$$y(x,t) = y_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (5.2)$$

Substituindo (5.2) em (5.1) e introduzindo as definições:

$$P_n^* = \frac{n^2 \pi^2 K}{L^2}, \quad n\text{-ésima carga crítica de Euler},$$

$$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{K}{\mu} \left(1 - \frac{P_0}{P_n^*}\right)}, \quad n\text{-ésima frequência natural},$$

obtem-se, para cada n , a equação diferencial ordinária de segunda ordem, com coeficiente periódico

$$\frac{d^2 y_n}{dt^2} + \omega_n^2 (1 + \epsilon \phi_n(t)) y_n = 0, \quad (5.3)$$

locidade do que aquelas.

3) a aceleração centrífuga tem efeito simétrico sobre as frequências e tende a reduzi-la a medida que $|\Omega|$ cresce.

4) o estado inicial gerado pelas forças centrífugas também tem efeito simétrico sobre as frequências, dependendo das condições de contorno e da forma da casca;

5) torques iniciais geram bifurcação no espectro de frequências independente dos efeitos da rotação;

e) os exemplos numéricos apresentados servem como confirmação de algumas das conclusões obtidas, e principalmente comprovam a validade do método de análise empregado.

f) A forma complexa da série de Fourier, utilizada neste desenvolvimento, apresenta maior generalidade e também maior comodidade no tratamento dos termos de acoplamento dos diversos harmônicos, do que a forma real trigonométrica. Entretanto, do ponto de vista computacional, a operação com números complexos é mais demorada.

com

$$\phi_n(t) = \frac{P_1(t)}{P_n^* - P_0},$$

chamada equação de Mathieu-Hill. No caso particular da equação de Mathieu $\phi_n(t) = \cos \Omega t$, [47], [49], [50].

As propriedades principais da equação de Mathieu-Hill são:

1) dentro de certas regiões do plano dos parâmetros ϵ e Ω , chamadas regiões de ressonância paramétrica, existem soluções de (5.3) que crescem exponencialmente com o tempo,

2) soluções periódicas ocorrem nas fronteiras das regiões de instabilidade, sendo que soluções de mesmo período limitam regiões de instabilidade, enquanto que as regiões de estabilidade são limitadas por soluções de períodos diferentes,

3) para ϵ pequeno, as regiões de instabilidade se distribuem próximo às frequências

$$\Omega = \frac{2\omega_n}{k}, \quad k=1,2,3,\dots \quad (5.4)$$

$k = 1$ corresponde às regiões principais, e $k \geq 2$ às regiões secundárias (figura 5.1a).

A grande maioria dos problemas de estabilidade dinâmica não conduz à forma simples da equação de Hill, mas a sistemas de equações diferenciais onde a parte periódica não pode ser desacoplada. Neste caso além das regiões de ressonância paramétrica simples, ou simplesmente regiões de ressonância paramétrica, ocorrem também regiões de ressonância paramétrica combinatória, ou regiões de ressonância combinatória (figura 5.1b), em torno de

$$\Omega = \frac{\omega_n \pm \omega_m}{k}, \quad k = 1, 2, \dots, (m \neq n). \quad (5.5)$$

Em certos problemas as zonas de ressonância combinatória podem ser mais significativas do que as zonas de ressonân-

cia paramétrica [48], [51].

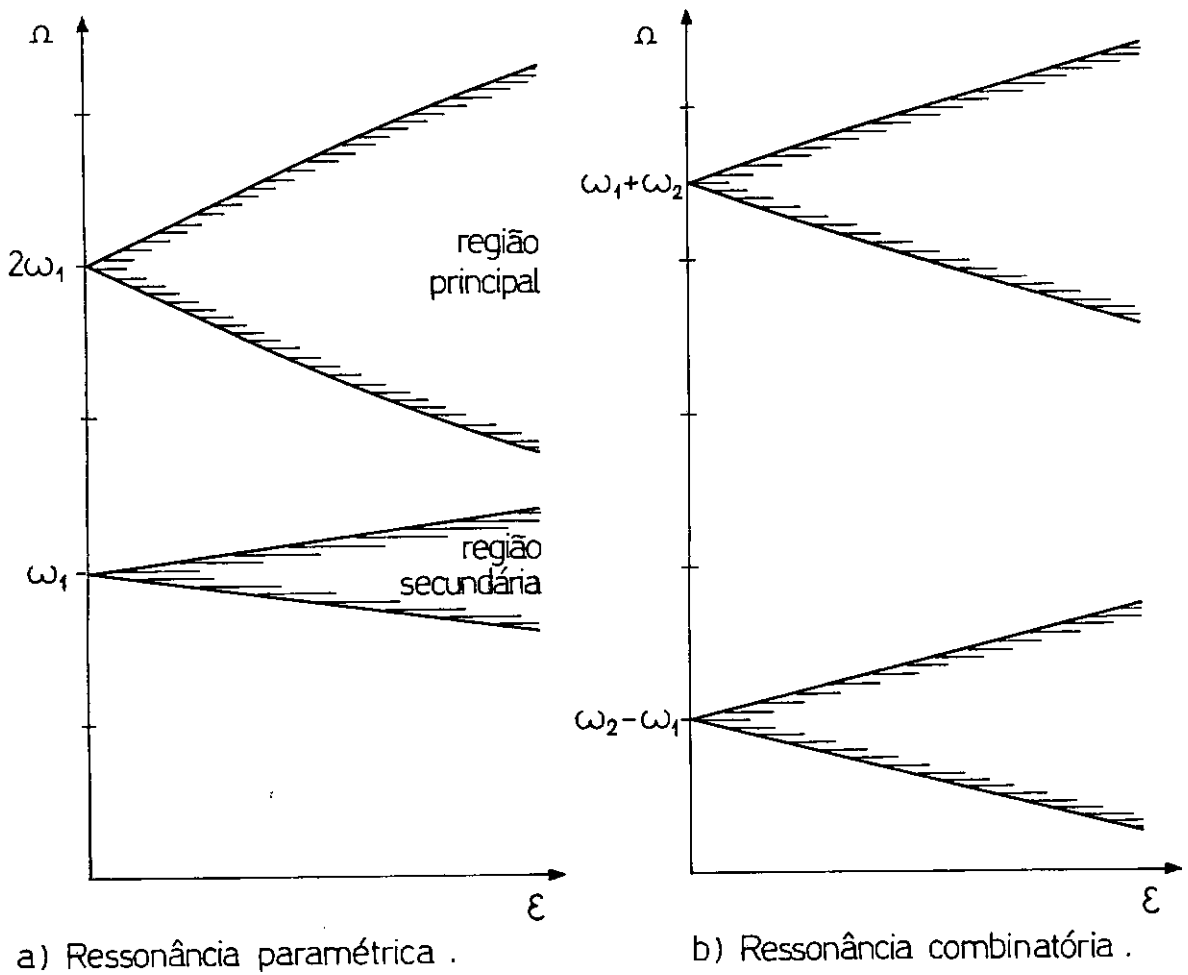


Fig. 5.1 - Tipos de instabilidade paramétrica

Neste ponto é interessante ressaltar as principais diferenças entre a ressonância simples e a ressonância paramétrica. A ressonância simples é gerada por uma excitação periódica externa, e ocorre para valores discretos dos parâmetros do sistema, enquanto que a ressonância paramétrica é devida a uma excitação periódica interna (auto-excitação), e ocorre para valores contínuos dos parâmetros do sistema. Além disto as amplitudes das vibrações na ressonância simples crescem linearmente com o tempo, já as amplitudes da ressonância paramétrica crescem exponencialmente; daí o caráter mais violento da instabilidade paramétrica. Estas observações são relativas a sistemas de equações lineares. É interessante notar também, que excitações paramétricas podem estabilizar sistemas estaticamente instáveis como, por exemplo, o pêndulo invertido [47], [48].

Para determinação das regiões de instabilidade em sistemas de equações com coeficientes periódicos são normalmente usados métodos de perturbação [18], [51], [52], métodos de balanço harmônico [47], [53], [54], e métodos numéricos baseados na teoria de Floquet [49], [55], [56]. A decisão quanto às conveniências de um ou outro método irá depender do problema em estudo. Os métodos de perturbação estão sempre fundamentados no fato de que os termos periódicos da equação são pequenos, e têm a vantagem de fornecer explicitamente uma aproximação das regiões de ressonância paramétrica e combinatória. Os métodos de balanço harmônicos se baseiam na existência de soluções periódicas na fronteira das regiões de instabilidade e conduzem a uma extensão do determinante infinito de Hill, [47]. Têm a vantagem de gerar, de forma sistemática, as aproximações de ordem superior, mas só determinam regiões de ressonância fundamental (paramétrica simples). Já a análise numérica de Floquet, embora permita a determinação das regiões de ressonância fundamental e combinatória sem a limitação de parâmetros pequenos, é computacionalmente demorada uma vez que envolve integração numérica da equação em um período, e iteração para obtenção das fronteiras das regiões de instabilidade [49], [55].

5.2. Resultados da teoria das equações diferenciais ordinárias.

Considere-se o sistema de equações diferenciais ordinárias no tempo,

$$\dot{\tilde{X}} = \tilde{F}(\tilde{X}, t) \quad (5.6)$$

onde \tilde{F} é uma função vetorial contínua e com derivadas parciais contínuas, em relação a X_i , em um conjunto aberto

$$S = \{(\tilde{X}, t), t \geq t_0\}. \quad (5.7)$$

Seja $\tilde{X}^* = \tilde{X}^*(X_0, t_0, t)$ uma solução particular de (5.6), cuja estabilidade se deseja estudar. A estabilidade de \tilde{X}^* pode sempre ser reduzida à estabilidade da solução trivial

de um novo sistema, isto é, pela mudança de variável,

$$\tilde{X} = \tilde{X}^* + \tilde{u}, \quad (5.8)$$

a solução \tilde{X}^* se transforma na solução $\tilde{u} = 0$ do sistema

$$\dot{\tilde{u}} = \tilde{F}(\tilde{X}^* + \tilde{u}, t) - \tilde{F}(\tilde{X}^*, t). \quad (5.9)$$

Supondo que as F_i têm derivadas parciais contínuas até a segunda ordem, pode-se escrever

$$\dot{\tilde{u}} = \tilde{A} \tilde{u} + \tilde{H}(\tilde{u}, t) \quad (5.10)$$

com

$$A_{ij} = \left. \frac{\partial F_i}{\partial X_j} \right|_{X_j^*}, \text{ e } \lim_{\|\tilde{u}\| \rightarrow 0} \tilde{H}(\tilde{u}, t) / \|\tilde{u}\| = 0; \forall t \geq t_0.$$

É natural associar o sistema linear,

$$\dot{\tilde{u}} = \tilde{A} \tilde{u}, \quad (5.11)$$

ao sistema variacional não linear (5.10), investigando quando a estabilidade ou instabilidade de (5.11) implica em estabilidade ou instabilidade da solução trivial do sistema não linear (5.10).

Se o sistema (5.6) é autônomo e \tilde{X}^* independe do tempo (i.e., \tilde{X}^* é um ponto de equilíbrio), então o sistema (5.11) é linear e autônomo. Por outro lado se \tilde{X}^* é uma solução periódica de (5.6), o sistema (5.11) será linear com coeficientes periódicos. Obviamente, se (5.6) é linear, (5.10) também é linear, com $\tilde{H}(\tilde{u}, t) \equiv 0$.

Alguns resultados sobre estabilidade em equações diferenciais ordinárias são apresentados a seguir, na forma de teoremas. Para maiores detalhes podem ser consultadas as referências [57], [58], [59].

a) Sistema linear com coeficientes constantes

TEOREMA 1 - 0 sistema linear de primeira ordem

$$\dot{\tilde{X}} = \tilde{A} \tilde{X}$$

onde \tilde{A} é uma matriz $n \times n$, independente do tempo, tem solução limitada para $t \geq t_0$ se e somente se todos os autovalores ρ_r de \tilde{A} têm $\text{Re}(\rho_r) < 0$, $r = 1, 2, \dots, m$, onde m é o número de raízes distintas, e para aquelas raízes com $\text{Re}(\rho_r) = 0$, tem-se sempre $\mu_r = \nu_r$, sendo μ_r o grau de multiplicidade da raiz ρ_r e ν_r o grau de nulidade da matriz $(\tilde{A} - \rho_r \tilde{I})$, i.e. $\nu_r = n - p$, onde n é a ordem de \tilde{A} e p o posto de $(\tilde{A} - \rho_r \tilde{I})$.

Além disto este sistema tem todas as suas soluções tendendo a zero quando $t \rightarrow \infty$, se e somente se $\text{Re}(\rho_r) < 0$, $r = 1, 2, \dots, m$.

b) sistema linear com coeficientes variáveis

Os principais resultados nesta área dizem respeito a sistemas lineares do tipo

$$\dot{\tilde{X}} = \tilde{A}(t) \tilde{X}$$

cujos coeficientes $A_{ij}(t)$ são de algum modo assintóticos a coeficientes constantes ou são funções periódicas no tempo.

TEOREMA 2 - (Teorema de Liapunov)

Se \tilde{A} é uma matriz constante e $\tilde{C}(t)$ é uma matriz cujos elementos são funções contínuas de t , com $\|\tilde{C}\| < c$ suficientemente pequeno para todo $t \geq t_0$, e se todas as soluções do sistema $\dot{\tilde{X}} = \tilde{A} \tilde{X}$ tendem a zero quando $t \rightarrow \infty$, então todas as soluções do sistema $\dot{\tilde{X}} = (\tilde{A} + \tilde{C}(t)) \tilde{X}$ tendem a zero quando $t \rightarrow \infty$. A constante c pode depender da matriz \tilde{A} .

TEOREMA 3

Se \tilde{A} é uma matriz constante e $\tilde{C}(t)$ é uma matriz cujos coeficientes são funções mensuráveis de t , com

$$\int_0^{\infty} \|\tilde{C}(t)\| dt < \infty$$

e se todas as soluções do sistema $\dot{X} = A X$ são limitadas, então todas as soluções do sistema $\dot{\tilde{X}} = [\tilde{A} + \tilde{C}(t)]\tilde{X}$ são também limitadas em $[0, \infty)$.

TEOREMA 4 - O sistema

$$\dot{\tilde{X}} = \tilde{A}(t)\tilde{X}, \text{ com } \tilde{A}(t + T) = \tilde{A}(t), \quad (5.13)$$

tem pelo menos uma solução não idênticamente nula com

$$\tilde{X}(t + T) = \lambda \tilde{X}(t) \quad (5.14)$$

para todo t , sendo $\lambda \neq 0$ uma constante real ou complexa.

Demonstração - Seja $\phi(t)$ a matriz fundamental constituída pelo conjunto solução de (5.13), logo

$$\dot{\phi}(t) = \tilde{A}(t) \phi(t)$$

e obviamente,

$$\dot{\phi}(t + T) = \tilde{A}(t + T) \phi(t + T) = \tilde{A}(t) \phi(t + T) ;$$

Conclui-se, portanto que $\phi(t + T)$ é também solução de (5.13), e como $\phi(t)$ é a matriz fundamental, decorre imediatamente que

$$\phi(t + T) = B \phi(t) \quad (5.15)$$

onde B é uma matriz constante.

Logo λ é uma raiz de B . Se as raízes características λ_i de B são todas distintas, então existem n soluções satisfazendo a condição (5.14). Se por outro lado existem apenas m raízes distintas ($m \geq 1$), existirão pelo menos m soluções de (5.13) satisfazendo (5.14), e está completa a prova do teorema.

A partir deste teorema pode-se concluir:

1) todas as soluções $\tilde{X}(t)$ do sistema (5.13) tendem a zero quando $t \rightarrow \infty$ se e somente se $|\lambda_i| < 1$; $i = 1, 2 \dots m$.

2) todas as soluções $\tilde{X}(t)$ do sistema (5.13) são limitadas, se e somente se $|\lambda_i| \leq 1$, $i = 1, 2 \dots m$, e para aqueles λ_i com $|\lambda_i| = 1$, tem-se $\mu_i = \nu_i$.

3) o sistema periódico (5.13) tem solução periódica de período T se e somente se existe pelo menos uma raiz $\lambda_i = 1$, já a raiz $\lambda_i = -1$ corresponde a soluções com período $2T$.

TEOREMA 5 - seja

$$\dot{\tilde{X}} = (\tilde{A} + \epsilon \phi(t))\tilde{X}, \quad (5.16)$$

um sistema linear, com \tilde{A} constante e $\phi(t)$ uma perturbação periódica. Se todos os autovalores ρ_j de \tilde{A} têm $\text{Re}(\rho_j) < 0$, com $j = 1, 2 \dots m$, então para algum $\epsilon_0 > 0$ e todo ϵ real ou complexo com $|\epsilon| < \epsilon_0$, todas as soluções do sistema (5.16) tendem a zero quando $t \rightarrow \infty$.

Este teorema é uma consequência direta do teorema de Liapunov.

c) Sistema Variacional

Apresentam-se, a seguir, as condições para que a estabilidade do sistema variacional linear (5.11) implique em estabilidade da solução trivial do sistema (5.10), ou seja, quando a estabilidade infinitesimal implica em estabilidade.

TEOREMA 6

Se todos os valores característicos (no sentido generalizado) associados ao sistema variacional linear (5.11) possuem parte real negativa, então a solução trivial do sistema (5.10) é assintoticamente estável.

TEOREMA 7

Se existe pelo menos um valor característico associado ao sistema (5.11) com parte real positiva, então a solução trivial do sistema (5.10) é instável.

No limite, parte real nula, a estabilidade infinitesimal nada informa sobre a estabilidade da solução do sistema não linear.

5.3. - Estudo da estabilidade paramétrica de cas - cas axissimétricas

Visando o estudo da estabilidade infinitesimal da solução periódica (\underline{u}^* , \underline{N}^*), estudada na seção 4.4, será obtida, a seguir, a forma variacional linearizada da equação (4.75), em torno da solução periódica (\underline{u}^* , \underline{N}^*).

Serão consideradas forças de superfície e densidade de massa do carregamento, por unidade de área da superfície média, do tipo

$$\underline{p}(s, \eta) = \underline{p}_0(s) + \epsilon \sum_{m \neq 0} \underline{p}_m(s) e^{im\eta},$$

$$\mu(s, \eta) = \mu_0(s) + \epsilon \mu_1(s, \eta), \quad (5.17a,b)$$

onde ϵ é um parâmetro adimensional pequeno.

Para determinação da primeira aproximação das regiões de instabilidade, é suficiente tomar apenas a primeira aproximação da solução periódica, ou seja:

$$\underline{u}^*(s, \theta, t, \Omega) = \underline{u}_0^*(s, \Omega) + \epsilon \sum_{m \neq 0} \underline{u}_m^*(s, \Omega) e^{im(\theta - \Omega t)}$$

$$\underline{N}^*(s, \theta, t, \Omega) = \underline{N}_0^*(s, \Omega) + \epsilon \sum_{m \neq 0} \underline{N}_m^*(s, \Omega) e^{im(\theta - \Omega t)}$$

(5.18a,b)

A dependência de \underline{u}_m^* e \underline{N}_m^* em relação a Ω está evidenciada na equação (4.33), enquanto que \underline{u}_0^* e \underline{N}_0^* dependem de Ω por causa do estado inicial gerado pela força centrífuga.

Seja (\underline{u}' , \underline{N}') uma solução de (4.75) adjacente a

$(\underline{u}^*, \underline{N}^*)$, isto é:

$$\underline{u}'(s, \theta, t) = \underline{u}^*(s, \theta, t) + \underline{u}(s, \theta, t),$$

$$\underline{N}'(s, \theta, t) = \underline{N}^*(s, \theta, t) + \underline{N}(s, \theta, t). \quad (5.19a, b)$$

onde \underline{u} e \underline{N} correspondem a perturbações sobre a solução periódica $(\underline{u}^*, \underline{N}^*)$ e são representadas pelas séries:

$$\underline{u}(s, \theta, t) = \sum_m \underline{u}_m(s, t) e^{im\theta}$$

$$\underline{N}(s, \theta, t) = \sum_m \underline{N}_m(s, t) e^{im\theta}. \quad (5.20a, b)$$

Substituindo (5.19a, b) e (5.20a, b) na equação não linear (4.75) e retendo apenas os termos lineares em ϵ e \underline{u} , obtem-se a equação variacional linearizada em torno de $(\underline{u}^*, \underline{N}^*)$,

$$\begin{aligned} & a_0(\ddot{\underline{u}}_m, \hat{\underline{u}}_{-m}) + 2\Omega a_1(\dot{\underline{u}}_m, \hat{\underline{u}}_{-m}) + \Omega^2 a_2(\underline{u}_m, \hat{\underline{u}}_{-m}) + \ell_0^*(\underline{u}_m, \hat{\underline{u}}_{-m}) = \\ & = -\epsilon \sum_{\ell \neq m} e^{-i(m-\ell)\Omega t} \left\{ \eta_\ell^*(\underline{u}_\ell, \hat{\underline{u}}_{-m}) + \int_{L_1}^{L_2} \gamma(\ell, m) (\ddot{\underline{u}}_\ell + 2i\ell\Omega \dot{\underline{u}}_\ell - \ell^2 \Omega^2 \underline{u}_\ell) \cdot \hat{\underline{u}}_{-m} R_0 ds \right\} \end{aligned}$$

$$\text{para } m = -M \dots M, \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} \ell_0^*(\underline{u}_m, \hat{\underline{u}}_{-m}) &= \langle D(\underline{A}_m + \underline{B}_m^{*T} \underline{B}_m), (\hat{\underline{A}}_{-m} + \underline{B}_0^{*T} \hat{\underline{B}}_{-m}) \rangle + \\ &+ \langle \underline{B}_m \underline{N}_0^*, \hat{\underline{B}}_{-m} \rangle + \langle \underline{G} \underline{X}_m, \hat{\underline{X}}_{-m} \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_\ell^*(\underline{u}_\ell, \hat{\underline{u}}_{-m}) &= \langle (\underline{B}_{\ell} \underline{N}_{m-\ell}^* + \underline{B}_m^{*T} \underline{D} \underline{A}_\ell), \hat{\underline{B}}_{-m} \rangle + \\ &+ \langle \underline{D}/2 (\underline{B}_{m-\ell}^{*T} \underline{B}_\ell + \underline{B}_\ell^T \underline{B}_{m-\ell}^*), \hat{\underline{A}}_{-m} \rangle. \quad (5.22a, b) \end{aligned}$$

A equação (5.21) é consistente apenas com a primeira aproximação das regiões de instabilidade infinitesimal, já que em (5.18a, b) e (5.21) foram considerados somente termos até a ordem ϵ .

Na determinação das regiões de instabilidade considerou-se ainda que a influência do termo $2\Omega a_1(\dot{\underline{u}}_m, \hat{\underline{u}}_{-m})$, relativo à aceleração de Coriolis é pequena, e portanto pode-se transferir este termo para o segundo membro de (5.21), admitindo que ele também está multiplicado por ϵ , e no final da análise faz-se este coeficiente igual à unidade. Deste modo a equação (5.21) fica substituída por

$$\begin{aligned} a_0(\ddot{\underline{u}}_m, \hat{\underline{u}}_{-m}) + \Omega^2 a_2(\underline{u}_m, \hat{\underline{u}}_{-m}) + \ell_0^*(\underline{u}_m, \hat{\underline{u}}_{-m}) = \\ = -\epsilon \Omega 2a_1(\dot{\underline{u}}_m, \hat{\underline{u}}_{-m}) - \epsilon \sum_{\ell \neq m} e^{-i(m-\ell)\Omega t} \eta_\ell^*(\underline{u}_\ell, \hat{\underline{u}}_{-m}) - \\ - \epsilon \sum_{\ell \neq m} e^{-i(m-\ell)\Omega t} \int_{L_1}^{L_2} \gamma(\ell, m)(\ddot{\underline{u}}_\ell + 2i\ell\Omega\dot{\underline{u}}_\ell - \ell^2\Omega^2\underline{u}_\ell) \cdot \hat{\underline{u}}_{-m} \, , \end{aligned}$$

para $m = -M \dots M$.

(5.23)

A discretização de elementos finitos de (5.23) conduz ao sistema de equações diferenciais ordinárias, com coeficientes periódicos no tempo,

$$\begin{aligned} \underline{M} \ddot{\underline{U}}_m + \underline{K}_{mm} \underline{U}_m = -\epsilon 2\Omega \underline{C} \dot{\underline{U}}_m - \epsilon \sum_{\ell \neq m} e^{-i(m-\ell)\Omega t} \underline{K}_{m\ell} \underline{U}_\ell - \\ - \epsilon \sum_{\ell \neq m} e^{-i(m-\ell)\Omega t} \underline{M}_{m\ell} (\ddot{\underline{U}}_\ell + 2i\ell\Omega\dot{\underline{U}}_\ell - \ell^2\Omega^2\underline{U}_\ell) \, , \end{aligned}$$

para $m = -M \dots M$.

(5.24)

As matrizes \underline{M} e \underline{C} já foram definidas anteriormente. $\underline{K}_{mm} = \underline{K}_{mm}(\Omega)$ resulta da discretização de $\ell_0^*(\underline{u}_m, \hat{\underline{u}}_{-m}) + \Omega^2 a_2(\underline{u}_m, \hat{\underline{u}}_{-m})$. $\underline{K}_{m\ell} = \underline{K}_{m\ell}(\Omega)$, $\ell \neq m$, representa o acoplamento elástico de diferentes harmônicos, e é obtida da discretização de $\eta_\ell^*(\underline{u}_\ell, \hat{\underline{u}}_{-m})$. A matriz $\underline{M}_{m\ell}$ decorre da consideração da massa do carregamento, e também produz acoplamento entre os diversos harmônicos.

Embora não exista ainda uma maneira precisa de se avaliar o amortecimento estrutural, estuda-se o efeito de um pequeno amortecimento externo sobre a estabilidade do sistema.

Admitindo-se que a matriz de amortecimento $\epsilon[A]$ seja de algum modo determinada, e somando-a à matriz de Coriolis, obtem-se o sistema

$$\begin{aligned} \tilde{M} \ddot{\tilde{U}}_m + \tilde{K}_{mm} \tilde{U}_m = -\epsilon \tilde{S} \dot{\tilde{U}}_m - \epsilon \sum_{l \neq m} e^{-i(m-l)\Omega t} \tilde{K}_{ml} \tilde{U}_l - \\ - \epsilon \sum_{l \neq m} e^{-i(m-l)\Omega t} \tilde{M}_{ml} (\ddot{\tilde{U}}_l + 2i l \Omega \dot{\tilde{U}}_l - l^2 \Omega^2 \tilde{U}_l), \end{aligned}$$

para $m = -M \dots M$, (5.25)

onde

$$\tilde{S} = \tilde{A} + 2\Omega \tilde{C}.$$

5.4. Determinação das regiões de ressonância para métrica

Uma primeira aproximação das regiões de ressonância paramétrica do sistema (5.25) será obtida através de uma extensão, a sistemas complexos, do método desenvolvido por HSU [18], para o estudo da estabilidade de sistemas de equações reais, semelhantes a (5.25), [10]. O método de HSU consiste essencialmente em:

- 1) redução do sistema a forma normal,
- 2) estudo de cada uma das equações pelo método de variação de parâmetros.

Para velocidades de rotação Ω , e estados iniciais abaixo do valor crítico, o problema de autovalor algébrico

$$\tilde{K}_{ll} \tilde{U}_l = \omega_l^2 \tilde{M}_{ll} \tilde{U}_l, \quad l = -M \dots M, \quad (5.26)$$

associado ao primeiro membro de (5.25), tem autovalores ω_l^2 positivos e distintos, portanto, aplicando a transformação de coordenadas

$$\tilde{U}_l = Q_{ll} X_l, \quad l = -M \dots M, \quad (5.27)$$

ao sistema (5.25), obtem-se a forma normal

$$\ddot{\tilde{X}}_m + [\omega_m^2] \tilde{X}_m = -\epsilon S_{mm}^* \dot{\tilde{X}}_m - \epsilon \sum_{\ell \neq m} e^{-i(m-\ell)\Omega t} K_{m\ell}^* \tilde{X}_\ell -$$

$$- \epsilon \sum_{\ell \neq m} e^{-i(m-\ell)\Omega t} M_{m\ell}^* (\ddot{\tilde{X}}_\ell + 2i\Omega \dot{\tilde{X}}_\ell - \ell^2 \Omega^2 \tilde{X}_\ell), \quad (5.28)$$

onde

$$S_{mm}^* = \bar{Q}_{mm}^T S Q_{mm},$$

$$K_{m\ell}^* = \bar{Q}_{mm}^T K_{m\ell} Q_{\ell\ell},$$

$$M_{m\ell}^* = \bar{Q}_{mm}^T M_{m\ell} Q_{\ell\ell},$$

sendo $Q_{\ell\ell}$ a matriz dos autovetores de (5.26) normalizados em relação a M , e $\bar{Q}_{\ell\ell} =$ conjugado $Q_{\ell\ell} = Q_{(-\ell, -\ell)}$.

Escrevendo (5.28) em termos das componentes, tem-se

$$\ddot{X}_{mp} + \omega_{mp}^2 X_{mp} = -\epsilon \phi_m(X_{\ell q}, t), \quad p = 1, 2, \dots, G, \quad (5.30)$$

com

$$\phi_m(X_{\ell q}, t) = \sum_{q=1}^G (S_{mmpq} \dot{X}_{mq} + \sum_{\ell \neq m} e^{-i(m-\ell)\Omega t} K_{m\ell pq} X_{\ell q}) +$$

$$+ \sum_{\ell \neq m} e^{-i(m-\ell)\Omega t} \sum_{q=1}^G M_{m\ell pq} (\ddot{X}_{\ell q} + 2i\Omega \dot{X}_{\ell q} - \ell^2 \Omega^2 X_{\ell q}), \quad (5.31)$$

sendo ω_{mp} , $p = 1, 2, \dots, G$, os autovalores de (5.26). G é o número de graus de liberdade da discretização de elementos finitos, $X_{\ell q}$ é a componente q do vetor \tilde{X}_ℓ , e S_{mmpq} , $K_{m\ell pq}$ e $M_{m\ell pq}$ são os elementos p, q das matrizes S_{mm}^* , $K_{m\ell}^*$ e $M_{m\ell}^*$, respectivamente.

Visando a aplicação do método de variação de parâmetros escreve-se (5.30) na forma do sistema de primeira ordem equivalente,

$$\dot{X}_{mp} = Y_{mp}$$

$$\dot{Y}_{mp} + \omega_{mp}^2 X_{mp} = -\varepsilon \phi_m(X_{\ell q}, t), p = 1, 2 \dots G. \quad (5.32a, b)$$

Para $\varepsilon = 0$, a solução de (5.32) é ,

$$X_{mp} = A_{mp} e^{i\omega_{mp}t} - B_{mp} e^{-i\omega_{mp}t},$$

$$Y_{mp} = i\omega_{mp} (A_{mp} e^{i\omega_{mp}t} - B_{mp} e^{-i\omega_{mp}t}), \quad (5.33a, b)$$

com A_{mp} e B_{mp} constantes a serem determinados posteriormente pelas condições iniciais.

Para $\varepsilon \neq 0$, tenta-se uma solução perturbada do tipo

$$X_{mp} = A_{mp}(t) e^{i\omega_{mp}t} + B_{mp}(t) e^{-i\omega_{mp}t} + \varepsilon x_{mp}(t),$$

$$Y_{mp} = i\omega_{mp} (A_{mp}(t) e^{i\omega_{mp}t} - B_{mp}(t) e^{-i\omega_{mp}t}) + \varepsilon \dot{x}_{mp}(t) \quad (5.34a, b)$$

onde os coeficientes A_{mp} e B_{mp} são agora admitidos como sendo função de t .

Substituindo (5.34) em (5.32), e tendo em vista a definição de ϕ_m , obtém-se:

- equações variacionais

$$\dot{A}_{mp} e^{i\omega_{mp}t} + \dot{B}_{mp} e^{-i\omega_{mp}t} = 0$$

$$\dot{A}_{mp} e^{i\omega_{mp}t} - \dot{B}_{mp} e^{-i\omega_{mp}t} = -\varepsilon S_{mmp} (A_{mp} e^{i\omega_{mp}t} - B_{mp} e^{-i\omega_{mp}t}), \quad (5.35a, b)$$

- equações de perturbação

$$\ddot{x}_{mp} + \omega_{mp}^2 x_{mp} = - \sum_{q \neq p} i\omega_{mq} S_{mmpq} (A_{mq} e^{i\omega_{mp}t} - B_{mq} e^{-i\omega_{mp}t}) -$$

$$- \sum_{\ell \neq m} \sum_{q=1}^G \{ H_{m\ell pq} A_{\ell q} e^{i[\omega_{\ell q} - (m-\ell)\Omega]t} + J_{m\ell pq} B_{\ell q} e^{-i[\omega_{\ell q} + (m-\ell)\Omega]t} \},$$
(5.36)

onde,

$$H_{m\ell pq} = K_{m\ell pq} - M_{m\ell pq} (\omega_{\ell q} + \ell\Omega)^2 \quad (5.37)$$

$$J_{m\ell pq} = K_{m\ell pq} - M_{m\ell pq} (\omega_{\ell q} - \ell\Omega)^2. \quad (5.38)$$

Em primeira aproximação os A_{mp} e B_{mp} são tomados como constantes, nas equações de perturbação, portanto a solução de (5.36), fora das regiões de ressonância, é dada por

$$x_{mp} = - \sum_{q \neq p} \frac{i\omega_{mq} S_{mmpq}}{\omega_{mp}^2 - \omega_{mq}^2} (A_{mq} e^{i\omega_{mq}t} - B_{mq} e^{-i\omega_{mq}t}) -$$

$$- \sum_{\ell \neq m} \sum_{q=1}^G \frac{H_{m\ell pq} A_{\ell q}}{\omega_{mp}^2 - [\omega_{\ell q} - (m-\ell)\Omega]^2} e^{i[\omega_{\ell q} - (m-\ell)\Omega]t} -$$

$$- \sum_{\ell \neq m} \sum_{q=1}^G \frac{J_{m\ell pq} B_{\ell q}}{\omega_{mp}^2 - [\omega_{\ell q} + (m-\ell)\Omega]^2} e^{-i[\omega_{\ell q} + (m-\ell)\Omega]t}. \quad (5.39)$$

Observa-se que em (5.39) existem termos cujos denominadores vão para zero, quando

$$\Omega = \pm \frac{\omega_{mp} \pm \omega_{nq}}{m - n}, \text{ para } m \neq n \text{ e } p, q = 1, 2, \dots, G, \quad (5.40)$$

logo, estes termos tendem a crescer indefinidamente quando a velocidade de rotação Ω se aproxima destes valores, por isto são chamados termos ressonantes. Para se estudar o comportamento da

solução na vizinhança destas velocidades, transferem-se os termos ressonantes para a parte variacional da análise.

Será estudado, inicialmente, o comportamento da solução na vizinhança de

$$\Omega = \frac{\omega_{mp} + \omega_{nq}}{m - n} + \varepsilon \lambda. \quad (5.41)$$

Com a inclusão dos termos ressonantes, as equações variacionais (5.35) transformam-se em:

$$\dot{A}_{mp} e^{i\omega_{mp}t} + \dot{B}_{mp} e^{-i\omega_{mp}t} = 0,$$

$$\begin{aligned} \dot{A}_{mp} e^{i\omega_{mp}t} - \dot{B}_{mp} e^{-i\omega_{mp}t} = & -\varepsilon S_{mmpq} (A_{mp} e^{i\omega_{mp}t} - B_{mp} e^{-i\omega_{mp}t}) - \\ & -\varepsilon \frac{H_{mnpq}}{i\omega_{mp}} A_{nq} e^{-i(\omega_{mp} + \varepsilon \lambda_m)t}, \end{aligned} \quad (5.42a,b)$$

e

$$\dot{A}_{nq} e^{i\omega_{nq}t} + \dot{B}_{nq} e^{-i\omega_{nq}t} = 0,$$

$$\begin{aligned} \dot{A}_{nq} e^{i\omega_{nq}t} - \dot{B}_{nq} e^{-i\omega_{nq}t} = & -\varepsilon S_{nnqq} (A_{nq} e^{i\omega_{nq}t} - B_{nq} e^{-i\omega_{nq}t}) - \\ & -\varepsilon \frac{J_{nmqp}}{i\omega_{nq}} B_{mp} e^{i(\omega_{nq} + \varepsilon \lambda_m)t}, \end{aligned} \quad (5.43a,b)$$

onde $\lambda_m = (m-n)\lambda$.

Explicitando \dot{B}_{mp} em (5.42) e \dot{A}_{nq} em (5.43) obtém-se o sistema:

$$\begin{aligned} \dot{B}_{mp} = & \frac{\varepsilon}{2} S_{mmpq} (A_{mp} e^{2i\omega_{mp}t} - B_{mp}) + \frac{\varepsilon H_{mnpq}}{2i\omega_{mp}} A_{nq} e^{-i\varepsilon \lambda_m t}, \\ \dot{A}_{nq} = & -\frac{\varepsilon}{2} S_{nnqq} (A_{nq} - B_{nq} e^{-2i\omega_{nq}t}) - \frac{\varepsilon J_{nmqp}}{2i\omega_{nq}} B_{mp} e^{i\varepsilon \lambda_m t}. \end{aligned} \quad (5.44a,b)$$

Este sistema será resolvido usando o método de Kryloff-Bogoliubov e Van der Pol, que neste caso resume-se a tomar a média, em um período, dos coeficientes de A_{mp} e B_{nq} , resultando então

$$\begin{aligned}\dot{B}_{mp} + \frac{\epsilon}{2} S_{mmp} B_{mp} &= \frac{\epsilon H_{mnpq}}{2i\omega_{mp}} A_{nq} e^{-i\epsilon\lambda_m t}, \\ \dot{A}_{nq} + \frac{\epsilon}{2} S_{nnq} A_{nq} &= -\frac{\epsilon J_{nmqp}}{2i\omega_{nq}} B_{mp} e^{+i\epsilon\lambda_m t},\end{aligned}\quad (5.45a,b)$$

que admite solução da forma,

$$\begin{aligned}B_{mp} &= B_{mp}^0 e^{\beta t - i\epsilon\lambda_m t/2} \\ A_{nq} &= A_{nq}^0 e^{\beta t + i\epsilon\lambda_m t/2}\end{aligned}\quad (5.46a,b)$$

onde B_{mp}^0 e A_{nq}^0 são constantes.

Substituindo (5.46) em (5.45), chega-se a seguinte equação indicial em β ,

$$\begin{aligned}\beta^2 + \frac{\epsilon}{2}(S_{mmp} + S_{nnq})\beta - \epsilon^2 \frac{H_{mnpq}}{4\omega_{mp}} \frac{J_{nmqp}}{\omega_{nq}} + \\ + \frac{1}{4}(\epsilon S_{mmp} - i\epsilon\lambda_m)(\epsilon S_{nnq} + i\epsilon\lambda_m) = 0.\end{aligned}\quad (5.47)$$

Lembrando que os termos de amortecimento e de aceleração de Coriolis, embora pequenos, não estão multiplicados por ϵ , faz-se então $\epsilon = 1$ nestes termos obtendo-se como equação indicial

$$\begin{aligned}\beta^2 + \frac{(S_{mmp} + S_{nnq})}{2}\beta - \epsilon^2 \frac{H_{mnpq}}{4\omega_{mp}} \frac{J_{nmqp}}{\omega_{nq}} + \\ + \frac{1}{4}(S_{mmp} - i\epsilon\lambda_m)(S_{nnq} + i\epsilon\lambda_m) = 0\end{aligned}\quad (5.48)$$

As regiões de estabilidade serão definidas pelo sinal da parte real de β , isto é:

$$\operatorname{Re}(\beta) > 0 \leftrightarrow \text{instabilidade},$$

$$\operatorname{Re}(\beta) < 0 \leftrightarrow \text{estabilidade assintótica},$$

$$\operatorname{Re}(\beta) = 0 \leftrightarrow \text{estabilidade neutra (fronteira)},$$

a questão é então, determinar quando $\operatorname{Re}(\beta)$ troca de sinal.

Para tornar as expressões mais simples serão introduzidas as definições:

$$\begin{aligned} S_p &= S_{mmp}/2, \quad S_q = S_{nnq}/2 \\ h &= H_{mnpq} J_{nmqp} / \omega_{mp} \omega_{nq}, \end{aligned} \quad (5.48a-c)$$

onde S_p , S_q e h são em geral complexos.

Em termos destes parâmetros a solução de (5.47) é

$$\beta = \frac{-(S_p + S_q) \pm \sqrt{a + bi}}{2}, \quad (5.49)$$

sendo

$$a = \operatorname{Re}(\Delta); \quad b = \operatorname{Im}(\Delta),$$

com

$$\Delta = (S_p - S_q - i\varepsilon\lambda_m)^2 + \varepsilon^2 h. \quad (5.50)$$

Considerando que a matriz \underline{S} é obtida pela soma $\underline{S} = \underline{A} + 2\Omega \underline{C}$, onde \underline{A} é a matriz de amortecimento simétrica e positiva, e levando em conta as definições de S_p e S_q , tem-se :

$$S_p = a_p + 2i \Omega c_p \quad \text{e} \quad S_q = a_q + 2i \Omega c_q, \quad (5.51)$$

sendo a_p , a_q , c_p e c_q números reais, dados por

$$\begin{aligned} a_p &= A_{mmp}/2, \quad a_q = A_{nnq}/2 \\ ic_p &= C_{mmp}/2, \quad ic_q = C_{nnq}/2, \end{aligned} \quad (5.52)$$

onde A_{mmp} e C_{mmp} , representam respectivamente elementos da diagonal das matrizes transformadas A_{mm}^* e C_{mm}^* .

Portanto, as condições de estabilidade ou instabilidade são equivalentes a:

$$\text{instabilidade: } \operatorname{Re}(\beta) > 0 \leftrightarrow \left[\frac{a + (a^2 + b^2)^{1/2}}{2} \right]^{1/2} > a_p + a_q, \quad (5.53)$$

$$\text{estabilidade: } \operatorname{Re}(\beta) < 0 \leftrightarrow \left[\frac{a + (a^2 + b^2)^{1/2}}{2} \right]^{1/2} < a_p + a_q. \quad (5.54)$$

Estas expressões permitem a determinação da primeira aproximação das regiões de ressonância correspondentes a frequências de excitação próximas a $(\omega_{mp} + \omega_{nq})/(m-n)$, com $m, n = -M \dots M$ e $p, q = 1, 2 \dots G$.

Visando uma melhor identificação da influência de certos parâmetros do sistema, tais como amortecimento, e massa do carregamento, algumas situações particulares são analisadas a seguir.

a) Sistema não amortecido

Neste caso $a_p = a_q = 0$, e a condição de instabilidade de (5.53) passa a

$$\left[a + (a^2 + b^2)^{1/2} \right]^{1/2} > 0, \quad (5.55)$$

que é sempre satisfeita pois $b \neq 0$, conforme se mostra a seguir.

Fazendo $a_p = a_q = 0$ em (5.51) e considerando (5.50) e (5.37), obtem-se:

$$\Delta = - \left[2\Omega(c_p - c_q) - \varepsilon \lambda_m \right]^2 + \varepsilon^2(h_0 + h_1 + h_2), \quad (5.56)$$

com

$$h_0 = K_{mnpq} K_{nmqp} / \omega_{mp} \omega_{nq},$$

$$h_1 = M_{mnpq} M_{nmqp} (\omega_{nq} + n\Omega)^2 (\omega_{mp} - m\Omega)^2 / \omega_{mp} \omega_{nq} \quad (5.57)$$

$$h_2 = - \left[\bar{M}_{mnpq} K_{nmqp} (\omega_{nq} + n\Omega)^2 + M_{nmqp} K_{mnpq} (\omega_{mp} - m\Omega)^2 \right] / \omega_{mp} \omega_{nq},$$

sendo h_0 e h_1 números reais e positivos, em consequência de

$$K_{mnpq} = \bar{K}_{nmqp} \text{ e } M_{mnpq} = \bar{M}_{nmqp}, \quad (5.58)$$

enquanto que h_2 é complexo, e portanto

$$\begin{aligned} a &= - \left[2\Omega(c_p - c_q) - \varepsilon \lambda_m \right]^2 + \varepsilon^2 \left[h_0 + h_1 + \operatorname{Re}(h_2) \right], \\ b &= \varepsilon^2 I_m(h_2), \end{aligned} \quad (5.59)$$

logo $b \neq 0$, o que significa que o sistema não amortecido é totalmente instável. Esta conclusão entretanto, deve ser aceita com reservas, pois ela está fundamentada em uma primeira aproximação e, em um modelo bastante simples para representar as forças de inércia associadas ao carregamento.

b) Carregamento sem massa

Se são desprezados o amortecimento estrutural ($a_p = a_q = 0$) e a massa do carregamento ($h_1 = h_2 = 0$), resultam

$$a = - \left[2\Omega(c_p - c_q) - \varepsilon \lambda_m \right]^2 + \varepsilon^2 h_0; \quad b=0 \quad (5.60)$$

e a condição de instabilidade passa a ser representada por $a > 0$, verificando-se assim que ocorre instabilidade para valores de Ω dentro das seguintes regiões:

1) para Ω positivo

$$\Omega_0^+ - \varepsilon \lambda_m^0 < \Omega < \varepsilon \lambda_m^0 + \Omega_0^+, \quad (5.61)$$

2) para Ω negativo

$$\Omega_0^- - \varepsilon \lambda_m^0 < |\Omega| < \varepsilon \lambda_m^0 + \Omega_0^-, \quad (5.67)$$

onde,

$$\Omega_0^+ = \frac{\omega_{mp} + \omega_{nq} + 2\Omega(c_p - c_q)}{m-n},$$

$$\Omega_0^- = \frac{\omega_{mp} + \omega_{nq} - 2\Omega(c_p - c_q)}{m-n} \quad (5.63)$$

$$\lambda_m^0 = \sqrt{h_0}/(m-n),$$

com $m, n = -M \dots M$ e $p, q = 1, 2 \dots G$.

Na figura 5.2 estão representadas as duas regiões de ressonância correspondentes a m, n, p e q fixos. Está claro que a existência de duas em vez de apenas uma região é devida a aceleração de Coriolis, que causa uma bifurcação no espectro de frequências, conforme foi visto no capítulo IV.

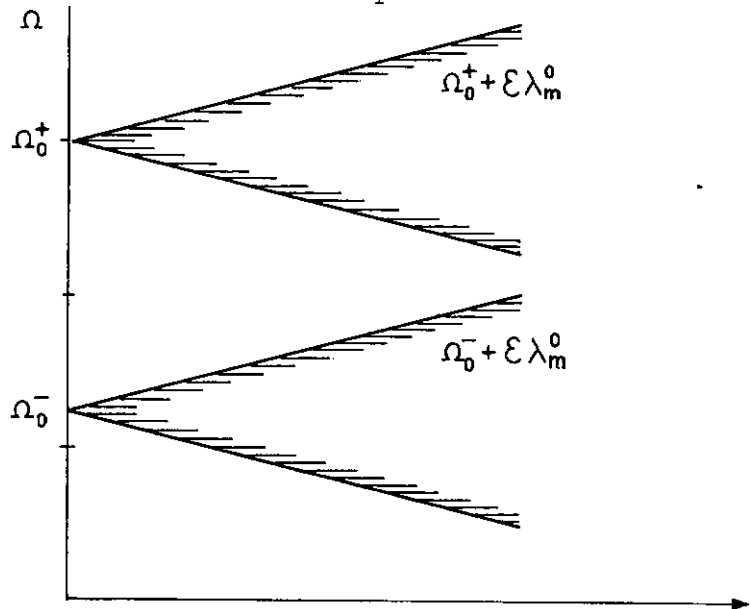


Fig. 5.2 - Regiões de ressonância (m, n, p, q fixos) ε

c) Influência da massa

Desprezando o amortecimento e o estado inicial periódico, i.e. $h_0 = h_2 = 0$, obtem-se as seguintes regiões de ressonância:

1) para Ω positivo

$$\Omega_0^+ - \varepsilon \lambda_m^1 < \Omega < \varepsilon \lambda_m^1 + \Omega_0^+ \quad (5.64)$$

2) para Ω negativo

$$\Omega_0^- - \varepsilon \lambda_m^1 < |\Omega| < \varepsilon \lambda_m^1 + \Omega_0^-, \quad (5.65)$$

sendo

$$\lambda_m^1 = \sqrt{h_1} / (m-n) \quad (5.66)$$

Portanto a consideração isolada da massa do carregamento dá origem a regiões de ressonância semelhantes às obtidas com a consideração isolada do estado inicial periódico, enquanto que o efeito combinado da massa do carregamento e do estado inicial periódico gera instabilidade total do sistema não amortecido.

d) Influência do amortecimento sobre as regiões de ressonância

Por simplicidade despreza-se o efeito da aceleração de Coriolis ($c_p = c_q = 0$) e da massa do carregamento ($h_1 = h_2 = 0$), e consideram-se apenas as influências do estado inicial e do amortecimento, logo

$$\Delta = (a_p - a_q - i \varepsilon \lambda_m)^2 + \varepsilon^2 h_0,$$

$$a = (a_p - a_q)^2 - \varepsilon^2 \lambda_m^2 + \varepsilon^2 h_0,$$

$$b = 2(a_p - a_q) \varepsilon \lambda_m, \quad (5.67a-c)$$

e a condição limite (fronteira das regiões de instabilidade) é dada pela seguinte equação em λ_m

$$\varepsilon^2 \lambda_m^2 = \varepsilon^2 h_0 / [1 - (d/\delta)^2] - \delta^2, \quad (5.68)$$

onde,

$$d = a_p - a_q \quad \text{e} \quad \delta = a_p + a_q. \quad (5.69)$$

De (5.68) conclui-se:

1) só existem λ_m reais para $\epsilon > \epsilon_0$, sendo ϵ_0 dado por:

$$\epsilon_0 = \sqrt{(\delta^2 - d^2)/h_0}, \quad (5.70)$$

significando que o amortecimento desloca as regiões de instabilidade, para a direita, de um valor ϵ_0 , (o que está de acordo com o teorema 5);

2) para $a_p - a_q \neq 0$ o amortecimento tende a aumentar a largura λ_m da região de instabilidade, conforme está ilustrado na Figura 5.3;

3) para $a_p - a_q = 0$ o amortecimento não causa aumento na largura das regiões de instabilidade, mas apenas desloca-as de

$$\epsilon_1 = \sqrt{\delta^2/h_0} \quad (5.71)$$

Estas conclusões estão de acordo com estudos teóricos [51], [60] e experimentais [61], [62], realizados anteriormente.

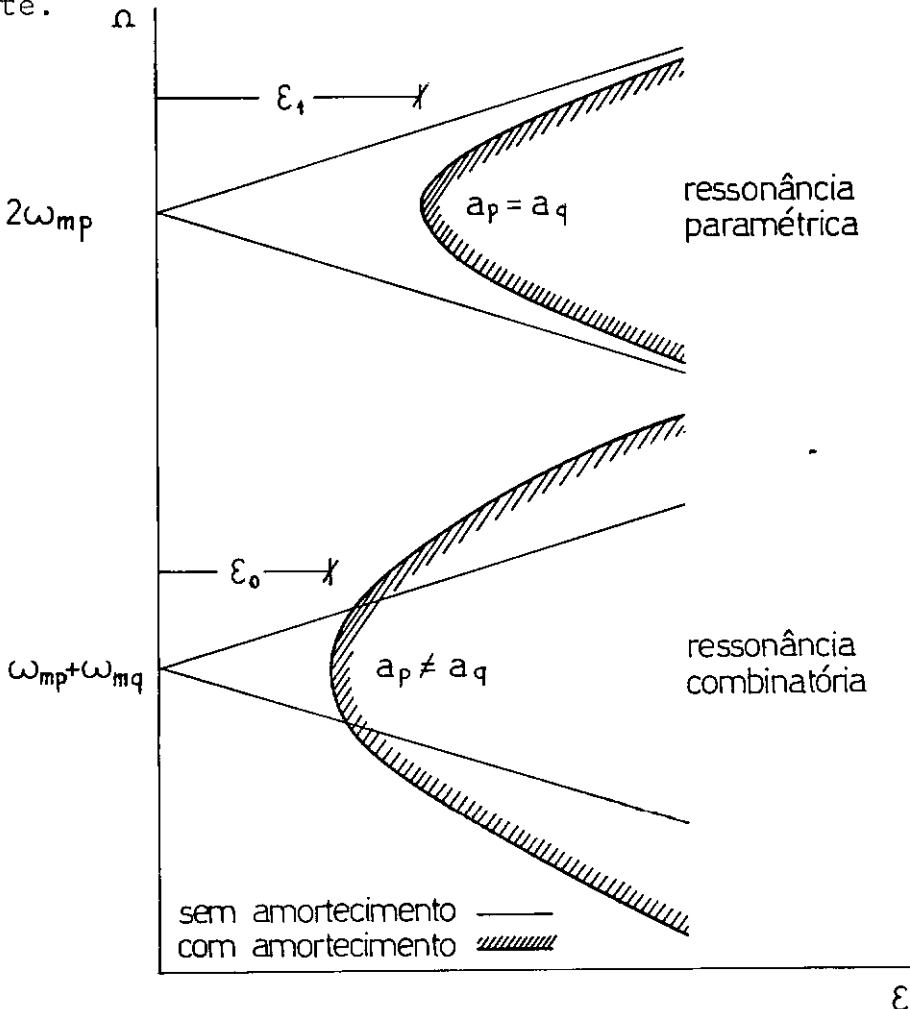


Fig. 5.3 - Influência do amortecimento nas regiões de instabilidade

Estudam-se, a seguir, as regiões de ressonância vizinhas a

$$\Omega = \pm \frac{\omega_{mp} - \omega_{nq}}{m-n} + \varepsilon \lambda. \quad (5.72)$$

Neste caso as equações variacionais são:

$$\dot{A}_{mp} e^{i\omega_{mp}t} + \dot{B}_{mp} e^{-i\omega_{mp}t} = 0$$

$$\begin{aligned} \dot{A}_{mp} e^{i\omega_{mp}t} - \dot{B}_{mp} e^{-i\omega_{mp}t} = & -\varepsilon S_{mnpq} (A_{mp} e^{i\omega_{mp}t} - B_{mp} e^{-i\omega_{mp}t}) - \\ & - \varepsilon \frac{J_{mnpq}}{i\omega_{mp}} B_{nq} e^{-i(\omega_{mp} - \varepsilon \lambda_m)t}, \end{aligned} \quad (5.73)$$

e,

$$\dot{A}_{nq} e^{i\omega_{nq}t} + \dot{B}_{nq} e^{-i\omega_{nq}t} = 0$$

$$\begin{aligned} \dot{A}_{nq} e^{i\omega_{nq}t} - \dot{B}_{nq} e^{-i\omega_{nq}t} = & -\varepsilon S_{nnqq} (A_{nq} e^{i\omega_{nq}t} - B_{nq} e^{-i\omega_{nq}t}) - \\ & - \varepsilon \frac{J_{nmqp}}{i\omega_{nq}} B_{nq} e^{-i(\omega_{nq} + \varepsilon \lambda_m)t}. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Explicitando \dot{B}_{mp} em (5.74) e \dot{B}_{nq} em (5.75) obtém-se um sistema do mesmo tipo de (5.44), e através de um procedimento similar ao utilizado anteriormente, chega-se a seguinte equação indicial em β

$$\beta^2 + (S_p + S_q)\beta + \frac{\varepsilon^2}{4} J + \frac{1}{4}(2S_p - i\varepsilon \lambda_m)(2S_q + i\varepsilon \lambda_m) = 0, \quad (5.75)$$

onde,

$$J = J_{mnpq} J_{nmqp} / \omega_{mp} \omega_{nq} \quad (5.76)$$

As regiões de ressonância são também determinadas por condições idênticas a (5.53) e (5.54), com a e b representando igualmente a parte real e imaginária de Δ , que neste caso é dado por

$$\Delta = (S_p - S_q - i\varepsilon \lambda_m)^2 - \varepsilon^2 J. \quad (5.78)$$

Por causa do sinal menos do termo $-\epsilon^2 J$, só existem regiões de instabilidade com J real negativo ou complexo. Portanto, só ocorrerá instabilidade no caso geral, quando são considerados os efeitos combinados de inércia do carregamento e estado inicial periódico. Nos casos correspondentes aos itens (b), (e) e (d), do estudo anterior, não existirão regiões de instabilidade porque, para estas situações, J é real e positivo, e neste caso não existem raízes reais para λ_m .

São, portanto, de pouca importância as regiões de ressonância vizinhas às frequências $(\omega_{mp} - \omega_{nq})/(m-n)$, pois ocorrem apenas quando J é complexo, o que neste caso corresponde à situação em que são considerados os efeitos combinados da massa do carregamento e do estado inicial periódico. Este fato tem consequências favoráveis à estabilidade do sistema a baixas velocidades de rotação.

5.5. Conclusões

a) O método de análise das regiões de instabilidade de sistemas de equações diferenciais ordinárias com coeficientes periódicos, apresentado neste capítulo, constitui uma extensão do método de HSU [18] a sistemas de equações de variáveis complexas, e apresenta, em relação a aquele, a vantagem de ser sempre mais cômodo trabalhar com exponenciais do que com funções trigonométricas.

b) Os resultados obtidos nesta análise são aplicáveis ao estudo da estabilidade paramétrica de cascas de revolução com excitações periódicas quaisquer, sem a limitação a excitações axissimétricas, comum aos estudos anteriores.

c) Com relação ao problema específico da estabilidade de soluções periódicas de cascas axissimétricas com movimento de rotação, tem-se a destacar o seguinte:

1) Dado o tipo peculiar de excitação, gerado pelo carregamento considerado, não existem regiões de ressonância paramétrica simples mas apenas regi

ões de ressonância combinatória, relativas a combinações de frequências de diferentes harmônicos. Estas regiões ocorrem na vizinhança de

$$\Omega = \pm \frac{\omega_{mp} \pm \omega_{nq}}{m-n}, \text{ para } m \neq n \text{ e } p, q=1, 2, \dots, G,$$

onde ω_{mp} é a p-ésima frequência do harmônico m e ω_{nq} é a q-ésima frequência do harmônico n.

2) As regiões de ressonância mais significativas ocorrem na vizinhança das frequências

$$\Omega = \frac{\omega_{mp} + \omega_{nq}}{m-n}$$

e são de menor importância as regiões vizinhas a

$$\Omega = \frac{\omega_{mp} - \omega_{nq}}{m+n}$$

3) Os efeitos combinados de massa do carregamento e do estado inicial periódico geram instabilidade total do sistema não amortecido.

4) O amortecimento tem por um lado efeito favorável à estabilidade, pois desloca as regiões de instabilidade de um valor ϵ_0 positivo, mas por outro lado tem efeito desfavorável aumentando a largura das regiões de ressonância combinatória, sempre que os modos ressonantes não têm iguais coeficientes de amortecimento (fig. 5.3).

e) Os resultados obtidos neste trabalho têm, principalmente, um caráter qualitativo. A aplicação destes resultados a problemas reais é uma etapa indispensável, tanto para melhor compreensão quanto para confirmação ou retificação deste estudo.

d) De acordo com o teorema 7, as regiões de instabilidade paramétrica infinitesimal são também regiões de instabi-

dade no sentido de Liapunov, porém isto não significa necessariamente que a solução perturbada da equação não linear original é ilimitada, dentro destas regiões, pois os termos não lineares, desprezados na análise infinitesimal, podem ter efeito estabilizador. Neste caso pequenas perturbações nas condições iniciais, geram perturbações na solução que inicialmente tendem a crescer exponencialmente, mas estabilizam à medida que os termos não lineares passam a ser significativos, conforme ilustra a figura 5.4. Deste modo, para se ter um conhecimento mais preciso do comportamento do sistema é necessário uma análise mais rigorosa levando em conta os termos não lineares.

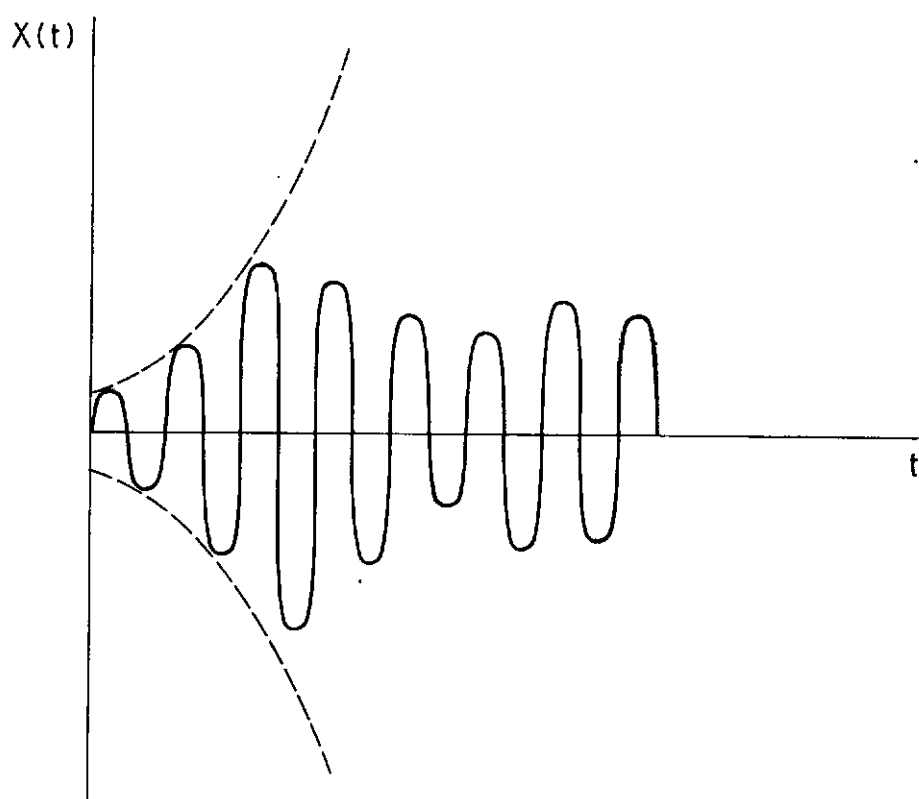


Fig. 5.4 - Ilustração da influência dos termos não lineares

BIBLIOGRAFIA

- [1] BEVILACQUA, L. - Análise de Tensões em Moinhos de Bolas
Relatório Técnico, Programa de Engenharia Mecânica, COPPE/UFRJ, 1976.
- [2] ALWAR, R.S. and RAMAMURTI, V. - Asymmetrical Bending of
Cylindrical Conical Shell Junction - Nuclear Engineering Design, Vol. 12, 97-121, 1970.
- [3] RAMAMURTI, V. and ALWAR, R.S. - Stress Analysis of Tube
Mill - Journal of Strain Analysis, Vol. 8, nº 3 ,
1973.
- [4] MACKE, H.J. - Traveling Wave Vibration of Gas — Turbine
Engine Shell - Journal of Engineering for Power ,
ASME, Vol. 88, 179-187, 1966.
- [5] SRINIVASAN, A.V. and LAUTERBACH, G.F. - Traveling Waves
in Rotating Cylindrical Shells - Journal of Engineering for Industry, ASME, Vol. 91, 1229-1232 ,
1971.
- [6] PENZES, L. and KRAUS, H. - Free Vibration of Prestressed
Cylindrical Shells Having Arbitrary Homogeneous Boundary Conditions - AIAA Journal, Vol. 10 ,
1309-1312, 1972.
- [7] PADOVAN, J. - Natural Frequencies of Rotating Cylinders
Journal of Sound and Vibrations, Vol. 31, 461-483,
1973.
- [8] PADOVAN, J. - Traveling Vibrations and Buckling of Rotating
Anisotropic Shells of Revolution by Finite Elements - International Journal of Solids Structures, Vol. 11, 1367-1380, 1975.

- [9] LOULA, A.F., GALEÃO, A.C., TAROCO, E. e FEIJÓO, R. - Vibrações de Cascas Axissimétricas com Movimento de Rotação, IV COBEM, Vol. A, 169-182, Florianópolis, 1977.
- [10] LOULA, A.F. - Estabilidade Paramétrica de Cascas Axis-simétricas - V COBEM, Campinas, 1979.
- [11] NAGAI, K. and YAMAKI, N. - Dynamic Stability of Circular Cylindrical Shells under Periodic Compressive Forces - Journal of Sound and Vibration, Vol. 58(3), 425-441, 1978.
- [12] TRUESDELL, C. - The Elements of Continuum Mechanics - Springer-Verlag, New York, U.S.A., 1965.
- [13] GURTIN, C. - An Introduction to Classical Continuum Me-
chanics - Notas não publicadas, Carnegie-Mellon
University, Pittsburgh, U.S.A.
- [14] FEIJÓO, R.A. - Introduccíón a Mecanica del Continuo ,
I Escola de Matemática Aplicada, Laboratório de
Cálculo do Centro Brasileiro de Pesquisas Físi -
cas, 1978.
- [15] ODEN, J. T. - Finite Elements of Non-Linear Continua -
McGraw-Hill, 1972.
- [16] PADOVAN, J. - On Gyroscopie Problems in Elasticity-In-
ternational Journal of Engineering Science, Vol.
16, 1061-1073, 1978.
- [17] NOVOZHILOV, V.V. - Foundations of the Nonlinear Theory
of Elasticity - Graylock Press, New York, 1953.
- [18] HSU, C.S. - On the Parametric Exitation of Dynamic Sys-
tems Having Multiple Degrees of Freedom - Jour -
nal of Applied Mechanics, Vol. 30, 367-372, 1963.

- [19] BATHE, K.J. - Static and Dynamic Geometric and Material Non-Linear Analysis Using ADINA - Report 82 448-2, M.I.T., Cambridge, 1977.
- [20] EBECKEN, N.F.F., LORANE, N.L. - Uma Linguagem Orientada a Análise Estrutural Não-Linear - Tese de DSc. COPPE/UFRJ, 1977.
- [21] ZIENKIEWICZ, O.C. - The Finite Element Method in Engineering Science - McGraw-Hill, 1971.
- [22] STOKER, J.J. - Differential Geometry - John Weley & Sons, 1969.
- [23] FLÜGGE, W. - Tensor Analysis and Continuum Mechanics - Springer-Verlag, 1972.
- [24] . BERNADOU, M. et CIARLET, P.G. - Sur l'Ellipticité du Modèle Linéaire de Coque de W. T. Koiter - IRIA , Report 155, 1976.
- [25] NOVOZHILOV, V.V. - Thin Shell Theory - Wolters - Noordhoff Publishing, Holanda, 1970.
- [26] KRAUS, H. - Thin Elastic Shells - John Weley & Sons , U.S.A., 1967.
- [27] ROJAS, H. - Métodos Variacionales en la Teoria de Love y Flugge de Cascaras de Revolucion - Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, 1977.
- [28] FLÜGGE, W. - Stress in Shells, Springer-Verlag, Berlin, 1962.
- [29] WASHIZU, K. - Variational Methods in Elasticity and Plasticity - Pergamon Press, 1968.

- [30] LOVE, A.E.H. - A treatise on the Mathematical Theory of the Elasticity - Dover Publications, 1944.
- [31] GREEN, A.E. and ZERNA, W. - Theoretical Elasticity - Oxford University Press, London, 1968.
- [32] RICHTMEYER, R.D. and MORTON, K.N. - Difference Methods for Initial - Value Problems, John Wiley & Sons, Second Edition, 1967.
- [33] GODOUNOV, S. and RIABENKI, V. - Schemas aux Differences - MIR, Moscou, 1973.
- [34] LOULA, A.F.D. e GUERREIRO, J.N.C. - Algoritmos para Integração no Tempo das Equações da Elasto-plasticidade. I Congresso Latino-Americano e III Simpósio sobre Sistemas Computacionais para Engenharia Civil - Porto Alegre, 1979.
- [35] STRANG, G. and FIX, G.F. - An Analysis of the Finite Element Method - Prentice-Hall, 1973.
- [36] AZIZ, A.K. - The Mathematical Foundations of the Finite Element Method... - Academic Press, 1972.
- [37] FIGUEIREDO, D.G. - Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais - Editora Edgard Blucher Ltda. São Paulo, 1977.
- [38] PADOVAN, J. - Quasi-analitical Finite Element Procedure for Axisymmetric Anisotropic Shells and Solids - Journal of Computers and Structures, Vol. 4, 467, 1974.
- [39] ROSS, C.T.F. - Finite Elements for the Vibration of Cones and Cylinders - International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 9, 833 - 845, 1975.

- [40] NAVARATNA, D.R., PIAN, T.H.H. and WITMER, E.A. - Stability Analysis of Shells of Revolution by Finite Element Method - AIAA Journal, Vol. 6, nº 2, 1968.
- [41] GUPTA, K.K. - Free Vibration Analysis of Spinning Structural Systems - International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 5, 395-418, 1973.
- [42] LOULA, A.F.D. e GALEÃO, A.C. - Cálculo Aproximado dos Auto-Valores num Problema de Vibrações Livres de Cascas Cilíndricas - 11º Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas, 1977.
- [43] BOUJOT, J. - Spectral Analysis in Vibration Mechanics - Autumn Course on Applications of Analysis to Mechanics, Trieste, Italia, 1976.
- [44] EVERSMAAN, W. and CLOYD, G.B. - The Coupled Transverse Vibrations of a Spinning Membrane Disk with a Central Hub - Journal of Sound and Vibration, Vol. 24(1), 1-15, 1972.
- [45] PRATO, N. - Aplicação do Método de Ritz Estendido na Análise de Vibrações e Estabilidade Dinâmica de Placas Girantes - Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, 1973.
- [46] LOULA, A.F. - Associação de Cascas de Revolução com Carregamento Axissimétrico - Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, 1973.
- [47] BOLOTIN, V.V. - Dynamic Stability of Elastic Systems - Holden-Day, 1964.
- [48] DZHANELIDZE, G. IV. - Stability of Elastic Systems under Dynamic Loading - Conference on Stability Problems in Structural Mechanics - Moscow, 1965.

- [49] MEIROVITCH, L. - Methods of Analitical Dynamics - McGraw-Hill, New York, 1970.
- [50] NAYFEH, A.H. and MOOK, D.T. - Non linear Oscillations- John Wiley & Sons, New York, 1979.
- [51] DERGUZOV, V. I., FOMIN, V.N. & IAKUBOVICH, V.A.- Some Mathematical Methods of Invertigating Dynamic Stability Equations of Systems with many Degrees of Freedom - Conference on Stability Problems in Structural Mechanics - Moscow, 1965.
- [52] HSU, L. - Analysis of Nonlinear Vibrations by The Normal Form Approach - Proceedings of the Seventh Canadian Congress of Applied Mechanics, 1979.
- [53] LEE, T. - A Study of Coupled Methien Equations by use of Infinite Determinants - Journal of Applied Mechanics, June, 1976.
- [54] LOULA, A.F.D., GALEÃO, A.C. e BEVILACQUA, L. - Estabilidade de Tubos Conduzindo Fluídos com Fluxo Periódico - Colóquio Franco-Brasileiro de Métodos Numéricos em Engenharia, Rio de Janeiro, 1976.
- [55] BURGAT, C. et MIRA, C. - Sur une Methode de Determination de Exposants Caracteristique d'un Systeme d'Equations Differentielle Lineaires a Coefficients Periodique.
- [56] HSU, C.S. and CHENG, W.H. - Steady-State Response of a Dynamical System under Combiened Parametric and Forcing Excitations - Journal of Applied Mechanics, June, 1974.
- [57] CESARI, L. - Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations - Springer-Verlag, Berlin, 1959.

- [58] PONTRIAGUINE, L. - Equations Differentiales Ordinaires - MIR, Moscou, 1969.
- [59] BELLMAN, R. - Stability Theory of Differential Equations - McGraw-Hill, New York, 1953.
- [60] IWATSUBO, T., SUGIYAMA, Y. and OGINO, S. - Simple and Combination Resonances of Columns under Periodic Axial Load - Journal of Sound and Vibration, Vol. 33(2), 211-221, 1974.
- [61] PAIDOUSSIS, M.P. and ISSID, N.T. - Experiments on Parametric Response of Pipes Containing Pulsatile Flow - Journal of Applied Mechanics, June, 1976.
- [62] DUGUNDJI, J. and MUKHOPADHYAY, V. - Lateral Bending - Torsion Vibrations of a Thin Beam under Parametric Excitation - Journal of Applied Mechanics, Sept. 1973.
- [63] STARZHINSKII, V.M. - On the Stability of a Trivial Solution of a Linear System with Periodic Coefficients - PMM Vol. 22, n° 5, 646-656, 1958.
- [64] BOHN, M.P. and HERMANN, G. - The Dynamic Behavior of Articulated Pipes Conveying Fluid with Periodic Flow Rate - Journal of Applied Mechanics, March, 1974.
- [65] GINSBERGER, J.H. - The Dynamic Stability of Pipe Conveying a Pulsatile Flow - International Journal on Engineering Science, Vol. 11, 1013-1024, 1973.
- [66] MITTAL, A.K. - Stability of Forced Periodic Response in third Order Non-linear Systems - Journal of Sound and Vibration 58(4), 577-585, 1978.

- [67] HAGEDORN, P. and KOVAL, L.R. - On the Parametric Stability of a Timoshenko Beam Subjected to a Periodic Axial Load - Ingenieur - Archiv 40, 211-220, 1971.
- [68] STUPNICKA, W.S. - The Generalized Harmonic Balance Method for Determining the Combination Resonance in the Parametric Dynamic Systems - Journal of Sound and Vibration 58(3), 347-361, 1978.
- [69] BARR, A.D.S. and MCWHANNELL, D.C. - Parametric Instability of Structures under Support Motion - Journal of Sound and Vibration 14(4), 491-509, 1971.
- [70] BOLOTIN, V.V. - On the Concept of Stability in Structural Mechanics - Conference on Stability Problems in Structural Mechanics - Moscow, 1965.
- [71] GOL'DENBLAT, I.I. - Some Questions of the Qualitative Theory of Stability of Elastic Systems - Conference on Stability Problems in Structural Mechanics - Moscow, 1965.
- [72] HSU, C.S., CHENG, W.H. and YEE, C.S. - Steady-State Response of Non-linear System under Impulsive Periodic Parametric Excitation - Journal of Sound and Vibration - Vol. 50(1), 95-116, 1977.
- [73] RADWAN, H.R. and GENIN, J. - Dynamic Instability of Cylindrical Shells - Journal of Sound and Vibration, Vol. 56(3), 373-382, 1978.
- [74] LOULA, A.F.D. e GALEÃO, A.C. - Vibrações de Sistemas Elásticos Lineares - Publicação Didática, COPPE/UFRJ, 1976.
- [75] CLOUGH, R.W. and PENZIEN, J. - Dynamics of Structures, McGraw-Hill, 1975.

- [76] LIMA, E.C.P.-LORANE-DINA - Uma Linguagem Orientada para Análise Dinâmica de Estruturas - Tese de D.Sc. COPPE/UFRJ, 1977.
- [77] MEIROVITCH, L. - Analytical Methods in Vibrations - The MacMillan Co., N.Y. 1967.
- [78] MEIROVITCH, L. - Elements of Vibration Analysis - McGraw-Hill, 1975.
- [79] BATHE, K.J. and WILSON, E.L. - Numerical Methods in Finite Element Analysis - Prentice-Hall, 1976.
- [80] STRINCKLIN, J.A. et al. - Nonlinear Analysis of Shells of Revolution by Matrix Displacement Method , AIAA Journal, Vol. 6, nº 12, 1968.
- [81] PRZEMIENIECKI, J.S. - Theory of Matrix Structural Analysis - McGraw-Hill, 1968.
- [82] VEUBEKE, B.F. - The Dynamic of Flexible Bodies - In - International Journal of Engineering Science, Vol. 14, 895-913, 1976.

SIMBOLOGIA*Geral*

(\sim)	- grandezas vetoriais ou tensoriais
(\cdot)	- produto escalar de vetores ou tensores
(\otimes)	- produto tensorial
(\wedge)	- produto vetorial
∇	- gradiente espacial
$(\)^T$	- transposto de um tensor, vetor em matriz.
t	- tempo
\underline{u}	- campo de deslocamentos
$\hat{\underline{u}}$	- campo de deslocamentos virtuais
$\dot{\underline{u}}$	- campo de velocidades
$\ddot{\underline{u}}$	- campo de acelerações
\underline{I}	- tensor identidade
$\text{tr}(\)$	- traço de um tensor
$\text{Re}(\)$	- parte real de um número complexo
$\text{Im}(\)$	- parte imaginária de um número complexo
$i = \sqrt{-1}$	- unidade imaginária

Δ - incremento

ε - pertence a

\forall - para todo

\cup - união

\cap - interseção

O - ordem

[] - bibliografia

Capítulo 11

\mathbb{B}	- corpo
\mathbb{E}	- espaço Euclidiano tridimensional
\bar{X}	- partícula
\tilde{X}	- configuração ou movimento de \mathbb{B}
\mathbb{P}	- parte de \mathbb{B}
\mathbb{B}_t	- configuração atual de \mathbb{B}
$m(\mathbb{P})$	- massa de \mathbb{P}
ρ	- densidade de massa
dV	- diferencial de volume
λ	- deformação de \mathbb{B}
κ_0	- configuração fixa de \mathbb{B}
\tilde{X}	- lugar ocupado por \bar{X} na configuração κ_0
\tilde{X}_t	- configuração atual de \mathbb{B}
\tilde{x}	- lugar ocupado por \bar{X} na configuração atual
∇	- gradiente em relação a \tilde{X}
grad	- gradiente em relação a \tilde{x}
\tilde{F}	- gradiente de deformação
\tilde{F}_t	- gradiente de deformação relativa
\tilde{R}	- tensor rotação
\tilde{U}	- alongamento direito
\tilde{V}	- alongamento esquerdo
\tilde{C}	- tensor de deformação de Cauchy-Green direito
\tilde{B}	- tensor de deformação de Cauchy-Green esquerdo
\tilde{E}	- tensor de deformações de Green-Lagrange
$\tilde{\varepsilon}$	- tensor de deformações infinitesimais
\tilde{A}	- tensor antissimétrico - "spin".
$\tilde{f}_b(\mathbb{P})$	- resultante das forças de massa sobre \mathbb{P}
$\tilde{f}_c(\mathbb{P})$	- resultante das forças de contato.
$\partial\mathbb{P}$	- contorno de \mathbb{P}
\tilde{b}	- densidade de forças de massa
\tilde{t}	- densidade de forças de superfície ou tração
$\tilde{M}(\mathbb{P}, x)$	- momento resultante sobre \mathbb{P} em relação a x
$\tilde{L}(\mathbb{P})$	- quantidade de movimento linear
$\tilde{H}(\mathbb{P})$	- quantidade de movimento angular
$\tilde{T}(x, t)$	- tensor de tensões de Cauchy
\tilde{n}	- normal a $\partial\mathbb{P}$

div	- divergente em relação a \underline{x}
$(\underline{\chi}, \underline{T})$	- processo dinâmico
$(\underline{t}, \underline{b})$	- sistema de forças
\underline{t}_0	- tração referida a \underline{x}_0
\underline{T}_0	- primeiro tensor de tensões de Piola Kirchhoff
\underline{S}	- segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff
Div	- divergente em relação a \underline{X} .
$f^t(\tau)$	- história da função f .
$\underline{u}, \underline{t}$	- valores prescritos de \underline{u} e \underline{t}
Kin	- conjunto cinematicamente admissível
Var	- espaço de variações admissíveis
\hat{W}_{ext}	- trabalho virtual das forças externas
$(\underline{u}, \underline{S})$	- processo dinâmico prescrito.

CAPÍTULO III

$\{e_i\}$	- base cartesiana de vetores
$\{e_i \otimes e_j\}$	- base cartesiana de tensores
S	- superfície regular
α_1, α_2	- coordenadas intrínsecas de S
$g_{\alpha\beta}$	- primeiras grandezas fundamentais de S
$L_{\alpha\beta}$	- segundas grandezas fundamentais de S
k_n	- curvatura normal
(t_1, t_2, n) ou (a_1, a_2, a_3)	- base do triedro intrínseco de S .
k_1, k_2	- curvaturas principais
R_1, R_2	- raios principais de curvatura
C	- casca (corpo)
C_0	- configuração fixa de C
C_t	- configuração atual de C
S_0	- configuração fixa de S
S_t	- configuração atual de S .
P	- ponto de S_0
P^*	- ponto de C , fora de S .
P_t	- ponto de S_t
P_t^*	- ponto de C_t , fora de S_t
\underline{X}	- vetor posição de P
\underline{X}^*	- vetor posição de P^*
$\underline{u}(\underline{X}, t)$	- campo de deslocamentos de S
$\underline{u}^*(\underline{X}, t)$	- campo de deslocamentos de C
ξ	- ordenada normal a S .
$\underline{\alpha}$	- $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$
h	- espessura de C
$\underline{\beta}$	- $\left. \frac{\partial u^*}{\partial \xi} \right _{\xi=0}$
\underline{E}^0	- tensor de deformação de S
\underline{E}^1	- tensor de variação de curvatura de S
\underline{T}^*	- primeiro tensor de tensões de Piola-Kirchhoff
\underline{q}^+	- tração na superfície externa de C
\underline{q}^-	- tração na superfície interna de C
\underline{t}_1	- tração na borda α_1 constante
\underline{t}_2	- tração na borda α_2 constante

\tilde{M}^*	- tensor de esforços resultantes de \tilde{T}^*
\tilde{N}^*	- tensor de momentos resultante de \tilde{T}^*
\tilde{N}	- tensor de esforços resultantes de \tilde{S}
\tilde{M}	- tensor de momentos resultantes de \tilde{S}
ϕ, θ	- coordenadas da superfície de revolução
R_0	- raio de curvatura do círculo paralelo
s, θ	- coordenadas da superfície cônica

CAPÍTULO IV

Ω	- velocidade de rotação da casca
\underline{u}	- campo de deslocamentos medidos a partir da configuração dinâmica.
$\dot{\underline{u}}$	- campo de velocidades relativas
$\ddot{\underline{u}}$	- campo de acelerações relativas
$\{e_i\}$	- base cartesiana intrínseca na configuração dinâmica
\underline{a}_0	- aceleração da origem do sistema dinâmico
s, θ	- coordenadas da superfície cônica
α	- semi-ângulo do cone
h	- espessura da casca
L	- comprimento da casca
η	- coordenada inercial, na direção circunferencial
$\underline{p}(s, \eta)$	- função carregamento
\hat{R}	- trabalho virtual das forças externas
E^0	- tensor de deformação da superfície média
E^1	- tensor de variação da curvatura da superfície média
$A_{\alpha\beta}$	- componentes das deformações lineares da superfície média
$B_{j\beta}$	- componentes das deformações não lineares da superfície média
$X_{\alpha\beta}$	- componentes das variações de curvatura da superfície média
$\underline{N}, \underline{M}$	- tensores de esforços e momentos resultantes das tensões
$\underline{D}, \underline{G}$	- tensores de elasticidade
\underline{u}_m	- amplitude dos deslocamentos do harmônico m.
$\underline{\bar{c}}$	- conjugado de c (complexo qualquer)
$\underline{A}_m, \underline{B}_m, \underline{X}_m$	- amplitudes de deformações do harmônico m
$\underline{N}_m, \underline{M}_m$	- amplitudes de esforços e momentos do harmônico m
\underline{M}	- matriz de massa
\underline{C}	- matriz de Coriolis
\underline{K}_m	- matriz de rigidez do harmônico m
\underline{G}	- matriz de rigidez centrífuga
\underline{G}_m	- matriz de rigidez geométrica do harmônico m
$\omega_{m\ell}$	- ℓ -ésima frequência do harmônico m.
$\mu(s, \eta)$	- densidade de massa do carregamento

- $\underline{u}_m^{(e)}$ - restrição ao elemento (e) da amplitude dos deslocamentos do harmônico m.
- $\underline{u}_m^{h(e)}$ - aproximação de elementos finitos de $\underline{u}_m^{(e)}$
- $\phi_j^{(e)}(s)$ - interpolante local de $\underline{u}_m^{h(e)}$
- $(U_m^{(e)})_j$ - parâmetro nodal do elemento (e).
- $\phi_\ell^{(e)}$ - polinômio cúbico de Hermite
- ϕ_k - interpolante global de \underline{u}_m^h .
- $(U_m)_k$ - parâmetro de interpolação global

CAPÍTULO V

- $(\underline{u}^*, \underline{N}^*)$ - solução conhecida
- $(\underline{u}', \underline{N}')$ - solução adjacente a $(\underline{u}^*, \underline{N}^*)$
- $(\underline{u}, \underline{N})$ - perturbação sobre $(\underline{u}^*, \underline{N}^*)$
- ϵ - parâmetro adimensional pequeno
- \underline{M} - matriz de massa
- \underline{K}_{mm} - matriz de rigidez do harmônico m.
- \underline{C} - matriz de Coriolis
- $\underline{K}_{m\ell}$ - matriz de rigidez correspondente ao acoplamento entre os harmônicos.
- $\underline{M}_{m\ell}$ - matriz de massa correspondente ao acoplamento entre os harmônicos
- \underline{A} - matriz de amortecimento
- $\underline{Q}_{\ell\ell}$ - matriz modal do harmônico ℓ
- \underline{U}_{ℓ} - vetor dos parâmetros nodais da aproximação de elementos finitos.
- \underline{X}_{ℓ} - vetor das coordenadas normalizadas
- $\underline{K}_{m\ell}^*$ - $\underline{\bar{Q}}_{mm} \underline{K}_{m\ell} \underline{Q}_{\ell\ell}$
- $\underline{K}_{m\ell pq}$ - componente (p,q) de $\underline{K}_{m\ell}^*$
- $X_{\ell p}$ - p-ésima componente de \underline{X}_{ℓ}